

# Yang-Mills-Theorie in Coulombbeichung

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines  
Doktors der Naturwissenschaften

der Fakultät für Mathematik und Physik  
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von  
**Claus Feuchter**  
aus Stuttgart

2006

Tag der mündlichen Prüfung:

26. Juni 2006

Dekan:

Prof. Dr. P. Schmid

1. Berichterstatter:

Prof. Dr. H. Reinhardt

2. Berichterstatter:

Prof. Dr. A. Fäßler

3. Berichterstatter:

Prof. Dr. M. Thies

## Zusammenfassung

In der vorliegenden Dissertation untersuchen wir im Rahmen des funktionalen Schrödingerbilds die Vakuumstruktur der Yang-Mills-Theorie in der Coulombbeichung und diskutieren insbesondere das von Gribov formulierte Szenario zum Farbeinschluß (confinement) der Quarks. Dieses Phänomen ist ohne Zweifel eine der bedeutendsten Eigenschaften stark gekoppelter Eichsysteme und erfordert eine nicht-perturbative Behandlung des Niederenergiesektors der Quantenchromodynamik (QCD). Unter den vielen Vorschlägen zur Erforschung der für den Farbeinschluß verantwortlichen Mechanismen stellt das Gribov-Szenario einen interessanten Ausgangspunkt dar. Dieser Formalismus basiert auf der QCD in der Coulombbeichung und erlaubt einen direkten Zugang zum nicht-abelschen Coulombpotential, welches die Wechselwirkung zwischen zwei statischen Quarks beschreibt.

Nach einer kurzen Einführung behandeln wir zunächst die für die Arbeit relevanten Grundlagen. Dazu erläutern wir den Aufbau der Yang-Mills-Theorien, deren kanonische Quantisierung in der Weyleichung und das funktionale Schrödingerbild. Die Diskussion der minimalen Coulombbeichung und des Gribov-Problems bilden dann die Ausgangsbasis für die anschließende Eichfixierung der Coulombbeichung mit der Faddeev-Popov-Methode und die Auflösung des Gaußschen Gesetzes.

Im dritten Kapitel lösen wir die funktionale Yang-Mills-Schrödingergleichung in der Coulombbeichung für den Vakuumzustand mit Hilfe eines Variationsprinzips. Dazu verwenden wir für das Vakuumwellenfunktional einen physikalisch motivierten Ansatz, welcher am Gribov-Horizont divergent ist. Die Minimierung der bis zur zweiten Schleifenordnung berechneten Vakuumenergie führt auf ein gekoppeltes System nichtlinearer Schwinger-Dyson-Integralgleichungen für die Gluonenergie, den Geist- und Coulombformfaktor und die Krümmung im Konfigurationsraum. Sowohl eine analytische Untersuchung als auch die volle numerische Lösung dieser Integralgleichungen zeigen im infraroten Sektor eine divergente Gluonenergie. Dieses Ergebnis deutet auf die Abwesenheit freier Gluonen bei kleinen Energien im physikalischen Spektrum und damit auf den Farbeinschluß der Gluonen hin. Der Geistformfaktor zeigt im infraroten Grenzfall ebenfalls ein divergentes Verhalten und erzeugt daher ein für große Abstände linear ansteigendes statisches Quarkpotential. Wir finden dieses physikalische Verhalten, also den Farbeinschluß der Gluonen und Quarks, sowohl in  $D = 2 + 1$  als auch in  $D = 3 + 1$  Dimensionen. Unsere Untersuchungen zeigen, daß die vollständige Implementierung der Krümmung des Konfigurationsraumes, welche durch den Faddeev-Popov-Operator zum Ausdruck kommt, von zentraler Bedeutung für die Eigenschaften des Farbeinschlusses ist. Eine Vernachlässigung dieser Krümmung in  $D = 3 + 1$  Dimensionen führt zu einem völlig anderen Infrarotverhalten und insbesondere zum Verlust des Farbeinschlusses der Gluonen und Quarks. Im Vergleich dazu hat die Vernachlässigung der Krümmung in der  $D = 2 + 1$  dimensionalen Yang-Mills-Theorie noch weitreichendere Konsequenzen – denn ohne die Krümmung im Konfigurationsraum existiert keine konsistente Lösung des gekoppelten Schwinger-Dyson-Integralgleichungssystems.

Im vierten Kapitel untersuchen wir mit einem verallgemeinerten Variationsansatz für das Vakuum den Einfluß unterschiedlicher Wahrscheinlichkeitsverteilungen am Gribov-Horizont auf die nicht-perturbativen Eigenschaften der Yang-Mills-Theorie und damit insbesondere auf den Farbeinschluß. Dieser verallgemeinerte Ansatz enthält eine beliebige Potenz der Faddeev-Popov-Determinante und beinhaltet dadurch höchst unterschiedliche Wahrscheinlichkeitsamplituden für die Feldkonfigurationen am Gribov-Horizont. Eine gründliche Unter-

suchung mit diesem Ansatz zeigt, daß die Variationslösung der stationären Schrödingergleichung innerhalb des Zweischleifenniveaus in der Vakuumenergie unabhängig von der Potenz der Faddeev-Popov-Determinante ist. Damit verändern sich insbesondere im infraroten Bereich weder der Gluon- noch der Geistpropagator, welcher den linearen Anstieg im nicht-abelschen Coulombpotential verursacht. Die durchgeführte Variationsbehandlung führt auf ein eindeutiges Infrarotverhalten des Vakuumwellenfunktionals und daher auf eine eindeutige Wahrscheinlichkeitsverteilung der Feldkonfigurationen am Gribov-Horizont. In diesem infraroten Grenzfall wird das Vakuumwellenfunktional unabhängig vom Eichfeld und beschreibt daher ein stochastisches Vakuum, in welchem die Farbfreiheitsgrade nicht über große Entfernungen propagieren können. Diese Form des Wellenfunktionals im Infraroten stimmt mit dem exakten Wellenfunktional in  $D = 1 + 1$  Dimensionen überein.

## **Meinen Eltern**



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Yang-Mills-Theorien in Coulombbeichung</b>	<b>13</b>
2.1	Yang-Mills-Theorien . . . . .	13
2.2	Kanonische Quantisierung . . . . .	16
2.3	Das funktionale Schrödingerbild . . . . .	19
2.3.1	Allgemeine Formulierung . . . . .	19
2.3.2	Quantenelektrodynamik . . . . .	21
2.4	Minimale Coulombbeichung – Gribov-Problem . . . . .	23
2.5	Faddeev-Popov-Eichfixierung und Auflösung des Gaußschen Gesetzes . . . . .	27
2.6	Eichfixierung und Auflösung des Gaußschen Gesetzes durch explizite Elimination der unphysikalischen Freiheitsgrade . . . . .	32
2.6.1	Hamiltonoperator . . . . .	33
2.6.2	Gaußoperator . . . . .	41
2.6.3	Auflösung des Gaußschen Gesetzes . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Variationsbehandlung der funktionalen Yang-Mills-Schrödingergleichung in Coulombbeichung</b>	<b>47</b>
3.1	Hamiltonsche Formulierung der Yang-Mills-Theorie in Coulombbeichung . . . . .	48
3.2	Wellenfunktional für das Yang-Mills-Vakuum und Propagatoren . . . . .	52
3.2.1	Vakuumwellenfunktional . . . . .	52
3.2.2	Geistpropagator und Geist-Gluon-Vertex . . . . .	55
3.2.3	Selbstenergie der Geistfelder . . . . .	57
3.2.4	Geist- und Coulomb-Formfaktor . . . . .	58
3.2.5	Krümmung im Konfigurationsraum . . . . .	60
3.3	Energiedichte des Yang-Mills-Vakuums . . . . .	63
3.4	Minimierung der Vakuumenergiedichte . . . . .	66
3.5	Yang-Mills-Theorie in $D = 3 + 1$ Dimensionen . . . . .	67
3.5.1	Asymptotisches Verhalten . . . . .	67
3.5.2	Renormierung der Schwinger-Dyson-Integralgleichungen . . . . .	74
3.5.3	Numerische Ergebnisse . . . . .	79
3.5.4	Das nicht-abelsche Coulombpotential . . . . .	85
3.6	Yang-Mills-Theorie in $D = 2 + 1$ Dimensionen . . . . .	88
3.6.1	Exakte analytische Eigenschaften . . . . .	89
3.6.2	Asymptotisches Verhalten . . . . .	93
3.6.3	Renormierung der Schwinger-Dyson-Integralgleichungen . . . . .	98

3.6.4	Numerische Ergebnisse . . . . .	99
3.7	Zusammenfassung . . . . .	104
<b>4</b>	<b>Das Wellenfunktional des Yang-Mills-Vakuums</b>	<b>107</b>
4.1	Gribovs Szenario zum Farbeinschluß . . . . .	107
4.2	Vakuumanatz . . . . .	109
4.3	Minimierung der Vakuumenergie . . . . .	110
4.4	Glunopropagator und Krümmung . . . . .	113
4.5	Vakuumenergie . . . . .	119
4.6	Yang-Mills-Wellenfunktional im Infraroten . . . . .	121
4.7	Yang-Mills-Theorie in $D = 1 + 1$ . . . . .	123
4.8	Zusammenfassung . . . . .	124
<b>5</b>	<b>Schlußfolgerungen und Ausblick</b>	<b>125</b>
<b>A</b>	<b>Konventionen</b>	<b>129</b>
A.1	Einheiten . . . . .	129
A.2	Minkowskiraum . . . . .	129
A.3	Lie-Gruppen und Lie-Algebren . . . . .	130
<b>B</b>	<b>Numerische Methoden zur Lösung der Schwinger-Dyson- Integralgleichungen</b>	<b>133</b>
B.1	Winkelintegrale . . . . .	133
B.2	Impulsintegrale . . . . .	134
B.3	Gekoppelter Löser . . . . .	135

# Kapitel 1

## Einleitung

Eine zentrale Zielsetzung der modernen Physik besteht in der Beschreibung der fundamentalen Teilchen und deren Wechselwirkungen innerhalb einer einheitlichen Theorie. Insbesondere durch die Formulierung der Quantentheorie und der Relativitätstheorie im letzten Jahrhundert wurden in dieser Richtung große Fortschritte erzielt, welche unsere Vorstellungen über die Natur drastisch verändert haben. Obwohl zum gegenwärtigen Zeitpunkt noch keine einheitliche Theorie gefunden ist, beschreibt doch das Standardmodell durch die gute Übereinstimmung mit den vorhandenen experimentellen Daten in beeindruckender Genauigkeit die physikalischen Vorgänge auf atomarer und subatomarer Ebene.

In diesem Zusammenhang bilden die Quantenfeldtheorien den mathematischen Rahmen für eine moderne Beschreibung der Natur, da sie insbesondere die Vereinigung dreier fundamentaler Konzepte der Physik beinhalten: Die Quantentheorie, das Feldkonzept und das Prinzip der Relativität. Die beiden Quantenfeldtheorien innerhalb des Standardmodells der Elementarteilchenphysik sind einerseits das Glashow-Salam-Weinberg-Modell der elektroschwachen Wechselwirkung, welches die Vereinigung der elektromagnetischen und schwachen Wechselwirkung beschreibt, und andererseits die Quantenchromodynamik (QCD) als Theorie der starken Wechselwirkung. Zwei sehr wichtige Schritte zur Formulierung dieser beiden Theorien waren zum einen die Entdeckung des Eichprinzips durch Yang und Mills [1] im Jahr 1954 und zum anderen der 1972 von 't Hooft erbrachte Beweis, daß die auf diesem Prinzip basierenden Quantenfeldtheorien, also die Eichtheorien, renormierbar sind [2].

Die Quantenchromodynamik als nicht-abelsche  $SU(3)$ -Eichtheorie beschreibt die starke Wechselwirkung der fundamentalen Fermionen (Quarks) durch den Austausch von  $SU(3)$ -Eichbosonen, den Gluonen, welche ihrerseits adjungierte Farbladungen tragen und im Gegensatz zur Quantenelektrodynamik aufgrund der nicht-abelschen Eichgruppe auch untereinander wechselwirken. Diese Yang-Mills-Theorie beinhaltet das Phänomen der „asymptotischen Freiheit“ [3], also die Eigenschaft, daß für große Impulse bzw. kleine Abstände die Quark-Gluon-Kopplung klein wird.<sup>1</sup> Dieses Verhalten ermöglicht insbesondere die Anwendung der Störungstheorie im Hochenergiesektor der QCD, dem sogenannten ultravioletten Bereich (UV). Die gute Übereinstimmung der auf der Störungstheorie basierenden Aussagen im Hochenergiebereich mit den experimentellen Daten begründet die Glaubwürdigkeit der QCD als Theorie der starken Wechselwirkung. Im Gegensatz dazu steigt die Kopplungskonstante für kleiner werdende Energien stark an und führt somit schließlich zum Versagen der

---

<sup>1</sup>Dies ist im Fall der  $SU(3)$ -Eichtheorie erfüllt, solange nicht mehr als 16 verschiedene Farben der Quarks auftreten.

Störungstheorie. Die Untersuchung der physikalischen Phänomene im Niederenergiesektor der QCD, dem infraroten Bereich (IR), erfordert daher die Anwendung nicht-perturbativer Methoden.

Eine der bedeutendsten Eigenschaften im Infrarotsektor der QCD ist ohne Zweifel der Farbeinschluß (confinement) der Quarks und Gluonen, also die Tatsache, daß wir in der Natur stets farbneutrale Objekte, wie etwa Mesonen und Baryonen, beobachten und niemals freie Teilchen mit nicht verschwindendem Farbfreiheitsgrad vorfinden. Obwohl komplexe numerische Berechnungen wenig Zweifel aufkommen lassen, daß dieser Effekt Bestandteil der nicht-perturbativen QCD ist, steht letztlich bis heute eine analytische Erklärung dieser Eigenschaft aus. Daher zählt die Untersuchung des Niederenergiesektors der QCD und insbesondere der Mechanismen, welche zum Farbeinschluß führen, zu den anspruchsvollsten Problemstellungen innerhalb der Quantenfeldtheorie.

Im allgemeinen erfolgt die Behandlung einer Quantenfeldtheorie, wie etwa der Yang-Mills-Theorie, mit dem Formalismus der Funktionalintegrale, welcher einerseits auf eine mit Feynman-Diagrammen darstellbare, perturbative Entwicklung führt und andererseits als Ausgangspunkt für numerische Gitterberechnungen dient [4]. Da diese Gittermethoden vor allem eine nicht-perturbative Behandlung der Quantenfeldtheorie ermöglichen, führte die Anwendung der Gitterberechnungen zu bedeutenden Einblicken in die Struktur des Yang-Mills-Vakuums. Dabei konnten in den letzten Jahrzehnten zwei unterschiedliche Vorstellungen zum Farbeinschluß bestätigt werden: Zum einen der duale Meißnereffekt, welcher auf der Kondensation magnetischer Monopole basiert [5], und zum anderen das Bild der Wirbelkondensation [6, 7]. In beiden Modellvorstellungen wird das Funktionalintegral der Yang-Mills-Theorie im infraroten Sektor durch topologische Feldkonfigurationen dominiert (magnetische Monopole [8] bzw. Zentrumswirbel [9]), welche letztlich den Farbeinschluß der Quarks bewirken. Neben diesen erfolgreichen Beschreibungen wurde zunächst von Gribov [10] und später von Zwanziger [11] ein weiterer Mechanismus zum Farbeinschluß vorgeschlagen, welcher auf der infraroten Dominanz der Feldkonfigurationen am Gribov-Horizont in Coulombbeziehung basiert und daher insbesondere mit den Vorstellungen der magnetischen Monopole und der Zentrumswirbel sehr gut übereinstimmt, da auch diese Feldkonfigurationen auf dem Gribov-Horizont liegen [12].

Trotz des großen Erfolgs der Gitterberechnungen bei der Erforschung der starken Wechselwirkung [13] benötigen wir für ein umfassendes Verständnis der Yang-Mills-Theorie neben diesen Gitterverfahren zusätzlich analytische Methoden. In dieser Hinsicht stellt der Funktionalintegralformalismus, welcher ohne Zweifel für semi-klassische und topologische Betrachtungen [14] sehr erfolgreich ist, für die analytische Untersuchung des nicht-perturbativen Yang-Mills-Vakuums möglicherweise nicht den besten Ausgangspunkt dar. Zum Beispiel ist die Berechnung des Elektronenspektrums des Wasserstoffatoms mit der Methode der Pfadintegrale deutlich komplizierter [15] als die alternative Behandlung mit der Schrödingergleichung. Aufgrund dessen könnte die Anwendung der entsprechenden funktionalen Schrödingergleichung auf den Niederenergiesektor der Yang-Mills-Theorie ebenfalls Vorteile gegenüber den Funktionalintegralmethoden bieten.

Die Formulierung der funktionalen Yang-Mills-Schrödingergleichung basiert auf der kanonischen Quantisierung in der Weyleichung  $A_0 = 0$  [16], wobei das Gaußsche Gesetz als Zwangsbedingung für die physikalischen Wellenfunktionale die Eichinvarianz dieser Zustände garantiert. Die Implementierung des Gaußschen Gesetzes ist dabei von entscheidender Bedeutung, da eine Verletzung dieser Zwangsbedingung im Laufe der Zeitentwicklung unphysikalische Farbladungen erzeugt, welche die tatsächlichen Farbladungen abschirmen und damit den

Farbeinschluß zerstören. Es gibt mehrere Möglichkeiten, die explizite Auflösung des Gaußschen Gesetzes durch eine Transformation auf eine reduzierte Anzahl von Feldvariablen, welche an keine Zwangsbedingung mehr gebunden sind, vorzunehmen. Dies kann einerseits durch die Wahl von eichinvarianten Variablen [17] oder andererseits durch die vollständige Fixierung der Eichung, beispielsweise der Coulombeichung [18], erreicht werden. Eine alternative Behandlung besteht in der Projektion des Yang-Mills-Wellenfunktionals auf eichinvariante Zustände, welche von vornherein das Gaußsche Gesetz erfüllen [19].

In der vorliegenden Arbeit lösen wir unter Verwendung eines Variationsprinzips die stationäre Yang-Mills-Schrödingergleichung in Coulombeichung für den Vakuumzustand. Solche auf dem Variationsprinzip basierenden Berechnungen wurden unter Verwendung eines Gaußschen Ansatzes bereits untersucht, wobei allerdings die Krümmung im Konfigurationsraum, repräsentiert durch die Faddeev-Popov-Determinante, komplett [20] bzw. teilweise [21] vernachlässigt wurde. Im Gegensatz dazu enthalten die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Variationsberechnungen zum Yang-Mills-Vakuum die vollständige Implementierung der Krümmung im Konfigurationsraum und zeigen vor allen Dingen, daß im Hinblick auf die nicht-perturbativen Eigenschaften – und damit insbesondere für den Farbeinschluß – die Effekte der Krümmung von zentraler Bedeutung sind.



## Kapitel 2

# Yang-Mills-Theorien in Coulombbeichung

In diesem Kapitel behandeln wir die für die vorliegende Arbeit relevanten Grundlagen zu den Yang-Mills-Theorien in der Coulombbeichung. Dazu erläutern wir zunächst im Abschnitt 2.1 den Aufbau der Yang-Mills-Theorien unter Verwendung des Prinzips der lokalen Eichinvarianz und diskutieren anschließend im Abschnitt 2.2 deren kanonische Quantisierung in der Weyleichung. Basierend auf dieser Formulierung behandeln wir dann im Abschnitt 2.3 das funktionale Schrödingerbild einer Quantenfeldtheorie. Die Diskussion der minimalen Coulombbeichung und des Gribov-Problems im Abschnitt 2.4 bilden die Ausgangsbasis für die anschließende Eichfixierung der Coulombbeichung mit der Faddeev-Popov-Methode und die Auflösung des Gaußschen Gesetzes im Abschnitt 2.5. Alternativ zu den in 2.5 dargestellten Ableitungen führen wir dann im Abschnitt 2.6 die Eichfixierung und die Auflösung des Gaußschen Gesetzes durch eine explizite Elimination der redundanten Freiheitsgrade durch.

### 2.1 Yang-Mills-Theorien

Die nicht-abelschen Eichtheorien sind für die fundamentale Beschreibung der physikalischen Vorgänge in der Natur von zentraler Bedeutung. Beispielweise beschreibt die Quantenchromodynamik (QCD) als  $SU(3)$ -Eichtheorie die Farbwechselwirkung zwischen den Quarks und Gluonen und ist damit in der Lage, den Aufbau der Hadronen zu erklären.

Die Formulierung der Yang-Mills-Theorien [22, 23, 24, 25] basiert auf der nicht-abelschen Verallgemeinerung der Quantenelektrodynamik (QED), welche unmittelbar aus der Forderung nach lokaler  $U(1)$ -Eichinvarianz resultiert. Ausgangspunkt für diese nicht-abelsche Verallgemeinerung bildet ein Materiefeld<sup>1</sup>

$$\psi^a(x) \tag{2.1}$$

mit einem internen Freiheitsgrad  $a = 1, \dots, N_C$ , welcher allgemein als Farbe bezeichnet wird. Als Verallgemeinerung der lokalen  $U(1)$ -Eichinvarianz<sup>2</sup> der QED betrachten wir bezüglich der Farbfreiheitsgrade des Materiefeldes  $\psi^a$  die Transformation

$$\psi^a(x) \longrightarrow (\psi^U)^a(x) = U^{ab}(x)\psi^b(x), \tag{2.2}$$

---

<sup>1</sup>Dieses Materiefeld  $\psi^a$  repräsentiert üblicherweise ein Spinorfeld.

<sup>2</sup>Die  $U(1)$ -Eichtransformation der QED ist durch  $U(x) = e^{i\alpha(x)}$  mit einer skalaren Funktion  $\alpha(x)$  gegeben.

wobei  $U$  ein Element einer kompakten Lie-Gruppe  $G$  darstellt.<sup>3</sup> Die Elemente  $U$  aus der kompakten Lie-Gruppe  $G$  können in der Form

$$U = e^{it^a \phi^a} \quad (2.3)$$

geschrieben werden.<sup>4</sup> Dabei bezeichnen  $t^a$  die hermiteschen Generatoren der Lie-Gruppe  $G$  und  $\phi^a$  die reellen Parameter der Transformation. Die Generatoren  $t^a$  der Lie-Gruppe erfüllen die Kommutationalgebra

$$[t^a, t^b] = if^{abc}t^c \quad (2.4)$$

mit den total antisymmetrischen Strukturkonstanten  $f^{abc}$  und sind auf

$$\text{tr} \left( t^a t^b \right) = \frac{1}{2} \delta^{ab} \quad (2.5)$$

normiert. Die hier definierte Transformation (2.2) beschreibt die Abbildung des Spinors  $\psi$  an jedem einzelnen Raum-Zeit-Punkt  $x$  durch ein völlig beliebiges Element  $U$  der Lie-Gruppe  $G$  und ist somit lokal. Damit besteht die Transformation (2.2) aus einer völlig beliebigen Abbildung<sup>5</sup>

$$U : M \longrightarrow G, \quad x \longrightarrow U(x) \quad (2.6)$$

der Raumzeit  $M$  in die Lie-Gruppe  $G$ . Die Grundlage für die Formulierung und Konstruktion der Yang-Mills-Theorien bildet das Prinzip der lokalen Eichinvarianz. *Dieses Prinzip verlangt die Invarianz der wechselwirkenden Theorie unter der Anwendung lokaler Eichtransformationen* (2.2). Daher muß insbesondere die Lagrangedichte der Theorie die Eichinvarianz als Symmetrie enthalten. Während der Massenterm  $m\bar{\Psi}\Psi$  der Lagrangedichte für Spinoren auch unter den lokalen Eichtransformationen (2.2) invariant bleibt, ist dies für den kinetischen Term  $i\bar{\Psi}\not{\partial}\Psi$  nicht mehr der Fall

$$i\bar{\Psi}\not{\partial}\Psi \longrightarrow i\bar{\Psi}^U \not{\partial}\Psi^U = i\bar{\Psi} \left[ \not{\partial} - U(\not{\partial}U^\dagger) \right] \Psi. \quad (2.7)$$

Um diesen kinetischen Term in eine eichinvariante Form zu bringen, müssen wir ein Hilfsfeld  $A_\mu = A_\mu^a t^a$  einführen, welches den inhomogenen Term  $U(\not{\partial}U^\dagger)$  in (2.7) kompensiert. Da dieser Term  $U(\not{\partial}U^\dagger)$  ein Element der Lie-Algebra ist, muß das Eichfeld  $A_\mu$  ebenfalls Bestandteil der Lie-Algebra sein. Unter der Verwendung dieses Eichfeldes  $A_\mu$  kann die Ableitung  $\partial_\mu$  zu einer kovarianten Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu \quad (2.8)$$

in der fundamentalen Darstellung erweitert werden. Hierin bezeichnet  $C$  die Einheitsmatrix im Farbraum und  $g$  die Kopplungskonstante. Damit nun der obige kinetische Term mit dieser kovarianten Ableitung eichinvariant ist, muß die kovariante Ableitung  $D_\mu$  unter Eichtransformationen  $U$  das folgende Verhalten aufweisen

$$D_\mu \longrightarrow D_\mu^U = UD_\mu U^\dagger. \quad (2.9)$$

<sup>3</sup>Üblicherweise wird gefordert, daß die Norm von  $\psi$ , also  $\psi^\dagger\psi$ , invariant bleibt unter der Transformation (2.2). Aufgrund dessen ist  $U$  unitär und damit ein Element der Lie-Gruppe  $U(N_C)$ .

<sup>4</sup>Strenggenommen gilt dies nur für die Elemente aus der Komponente der Einheit  $G_0 \subseteq G$  der Lie-Gruppe  $G$ .

<sup>5</sup>Gegebenenfalls sind noch Randbedingungen, wie etwa  $U(x) = U_0$  für  $x \in \partial M$ , zu implementieren (siehe auch [16]).

Diese Transformationseigenschaft von  $D_\mu$  wird insbesondere dann gewährleistet, wenn sich das Eichfeld in folgender Weise transformiert

$$A_\mu \longrightarrow (A^U)_\mu = U A_\mu U^\dagger + \frac{i}{g} U (\partial_\mu U^\dagger) \quad (2.10)$$

und somit den inhomogenen Term  $U(\partial_\mu U^\dagger)$  in (2.7) kompensiert. Falls die Winkel  $\phi^a$  der Eichtransformation (2.3) infinitesimal klein sind, kann die Transformation des Eichfeldes  $A_\mu$  in der Form

$$A_\mu^a \longrightarrow (A^U)_\mu^a = A_\mu^a + \frac{1}{g} (\partial_\mu \delta^{ac} + g f^{abc} A_\mu^b) \phi^c \quad (2.11)$$

dargestellt werden. In der oben eingeführten kovarianten Ableitung ist das Eichfeld  $A_\mu^a$  mit den Generatoren  $t^a$  der fundamentalen Darstellung der Lie-Gruppe  $G$  verknüpft. Die kovariante Ableitung in der adjungierten Darstellung, welche insbesondere für die Berechnungen in der hier vorliegenden Arbeit häufig benutzt wird, ist durch

$$\hat{D}_\mu^{ab} = \partial_\mu \delta^{ab} + g f^{acb} A_\mu^c \quad (2.12)$$

definiert. Unter Verwendung dieser kovarianten Ableitung in der adjungierten Darstellung kann die infinitesimale Eichtransformation (2.11) des Eichfeldes  $A$  in der Form

$$A_\mu^a \longrightarrow (A^U)_\mu^a = A_\mu^a + \frac{1}{g} \hat{D}_\mu^{ab} \phi^b \quad (2.13)$$

geschrieben werden. Das durch die kovariante Ableitung (2.8) eingeführte Hilfsfeld  $A_\mu$  ist im Moment noch statisch und trägt somit keine Freiheitsgrade. Um dieses Feld  $A_\mu$  zu einer dynamischen Feldvariablen auszubauen, benötigen wir in der Lagrangedichte einen Term, welcher zum einen eichinvariant ist und zum anderen quadratische Ableitungen von  $A_\mu$  enthält. Zu diesem Zweck führen wir die nicht-abelsche Verallgemeinerung der Feldstärketensors

$$F_{\mu\nu} = \frac{i}{g} [D_\mu, D_\nu] \quad (2.14)$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (2.15)$$

ein. Aufgrund der Relation (2.9) transformiert sich der so definierte Feldstärketensor unter Eichtransformationen  $U$

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow (F^U)_{\mu\nu} = U F_{\mu\nu} U^\dagger \quad (2.16)$$

in derselben Weise wie die kovariante Ableitung  $D_\mu$ . Unter Verwendung von  $F_{\mu\nu}$  läßt sich sofort eine Lagrangedichte  $\mathcal{L}_{\text{YM}}$  konstruieren

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{2} \text{tr} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}, \quad (2.17)$$

welche eichinvariant ist und quadratische Ableitungen des Eichfeldes  $A_\mu$  enthält. Die Wirkung der reinen Yang-Mills-Theorie hat damit die Form

$$W_{\text{YM}} = -\frac{1}{4} \int d^4 x F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \quad (2.18)$$

und repräsentiert den Teil der Wirkung, welcher lediglich das Eichfeld  $A$  enthält. Die Minimierung der Wirkung (2.18) gemäß dem Hamiltonschen Prinzip führt auf die Euler-Lagrange-Gleichungen. Diese klassischen Bewegungsgleichungen besitzen für die hier zugrundeliegende Lagrangedichte (2.17) die Form

$$\hat{D}_\mu^{ab} F^{b\mu\nu} = 0. \quad (2.19)$$

Dabei ist die zeitliche Komponente ( $\nu = 0$ ) als Gaußsches Gesetz und der räumliche Anteil als Ampèresches Gesetz bekannt.

## 2.2 Kanonische Quantisierung

Die kanonische Quantisierung setzt die Identifikation geeigneter kanonischer Koordinaten und Impulse voraus, auf welchen die Theorie aufgebaut werden kann. Dies beinhaltet insbesondere die Definition einer Hamiltonfunktion, deren Hamiltonsche Bewegungsgleichungen mit den klassischen Feldgleichungen (2.19) der Yang-Mills-Theorie übereinstimmen. Da die hier vorliegende Theorie aufgrund der Eichinvarianz (2.10) redundante Freiheitsgrade enthält, ist bei der Realisierung einer kanonischen Quantisierung – ähnlich wie bei der Elektrodynamik – mit Schwierigkeiten zu rechnen.

Die kanonischen Koordinaten der Yang-Mills-Theorie werden durch das Eichpotential  $A_\mu^a(x)$  repräsentiert. Der zu diesen Koordinaten kanonisch konjugierte Impuls ist durch

$$\Pi_\mu^a(x) = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{YM}}}{\partial \dot{A}_\mu^a(x)} \quad (2.20)$$

definiert und besitzt unter Verwendung von (2.17) die Form

$$\Pi_0^a(x) = 0 \quad (2.21)$$

$$\Pi_i^a(x) = -F_{i0}^a. \quad (2.22)$$

Da die Lagrangedichte unabhängig von  $\dot{A}_0$  ist, verschwindet der kanonische Impuls  $\Pi_0$  der Koordinate  $A_0$  und behindert insbesondere die Einführung von kanonischen Vertauschungsrelationen in der 0-Komponente. Dieses Problem können wir durch geeignete Ausnutzung der Eichfreiheit (2.10) umgehen, indem wir für die weitere Formulierung die *Weyleichung*

$$A_0^a = 0 \quad (2.23)$$

wählen.<sup>6</sup> Durch die Wahl dieser Eichung ist ein Teil der Eichfreiheit fixiert, und somit sind weitere zeitabhängige Eichtransformationen nicht mehr erlaubt, da diese zu einem nicht verschwindenden  $A_0$  führen können. Im Gegensatz dazu lassen zeitunabhängige Eichtransformationen  $U(\mathbf{x})$  die Eichbedingung  $A_0 = 0$  unberührt. Daher sind solche Transformationen weiterhin möglich und repräsentieren somit den verbleibenden Teil der Eichfreiheit. Die Weyleichung steht in engem Zusammenhang zu der Hamiltonschen Formulierung, in der die Zeit eine besondere Rolle einnimmt.

<sup>6</sup>Die Eichtransformation, welche den Übergang in die Weyleichung beschreibt, ist explizit durch

$$U(\mathbf{x}, t) = T \exp \left[ -ig \int_0^t d\tau A_0(\mathbf{x}, \tau) \right]$$

gegeben [18]. Dabei bezeichnet  $T$  den Zeitordnungsoperator.

Die räumlichen Komponenten des Eichfeldes  $A_i$  bilden zusammen mit den konjugierten Impulsen  $\Pi_i$  die kanonischen Variablen der Yang-Mills-Theorie in der Weyleichung. Basierend auf diesen Variablen erhalten wir für die Hamiltonfunktion (bzw. den Hamiltonoperator) die Darstellung

$$\begin{aligned} H_{\text{YM}} &= \int d^4x \mathcal{H}_{\text{YM}} = \int d^4x \left( \Pi_i^a(x) \dot{A}_i^a(x) - \mathcal{L}_{\text{YM}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x \left( E_i^a(x) E_i^a(x) + B_i^a(x) B_i^a(x) \right). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Dabei bezeichnen

$$E_i^a(x) = -\Pi_i^a(x) = F_{i0}^a(x) \quad (2.25)$$

$$B_i^a(x) = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{jk}^a(x) \quad (2.26)$$

das nicht-abelsche elektrische bzw. magnetische Feld. Innerhalb der Weyleichung (2.23) sind wir jetzt in der Lage, die kanonische Quantisierung durch die Einführung der Kommutatorrelationen

$$\left[ A_i^a(\mathbf{x}, t), \Pi_j^b(\mathbf{x}', t) \right] = i \delta_{ij} \delta^{ab} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (2.27)$$

$$\left[ A_i^a(\mathbf{x}, t), A_j^b(\mathbf{x}', t) \right] = \left[ \Pi_i^a(\mathbf{x}, t), \Pi_j^b(\mathbf{x}', t) \right] = 0. \quad (2.28)$$

zu formulieren. In der klassischen Theorie stehen anstelle der Kommutatoren die Poisson-Klammern. Wegen der in den obigen Kommutatorrelationen zugrundeliegenden Wirkung des Impulsoperators  $\Pi$  können wir diesen als Funktionalableitung nach dem Eichfeld

$$\Pi_i^a(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta}{i \delta A_i^a(\mathbf{x}, t)} \quad (2.29)$$

identifizieren. Die zeitliche Entwicklung der Koordinaten  $A(\mathbf{x}, t)$  und Impulse  $\Pi(\mathbf{x}, t)$  erfolgt durch die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen, welche wir im folgenden untersuchen wollen. Die Hamiltonsche Gleichung für das Eichfeld

$$\partial_t A_i^a(x) = i [H, A_i^a(x)] = -E_i^a(x) \quad (2.30)$$

reproduziert die Definition (2.25) des elektrischen Feldes. Andererseits führt die Hamiltonsche Gleichung für das elektrische Feld  $E_i = -\Pi_i$

$$\partial_t E_i^a(x) = i [H, E_i^a(x)] = \epsilon_{ijk} \hat{D}_j^{ab} B_k^b(x) \quad (2.31)$$

auf das Amperesche Gesetz und reproduziert somit die räumlichen Komponenten der klassischen Yang-Mills-Feldgleichungen (2.19). Allerdings ist in der vorliegenden Hamiltonschen Formulierung das Gaußsche Gesetz nicht mehr enthalten, es fehlt also die zeitliche Komponente der Feldgleichungen (2.19)

$$\hat{D}_i^{ab} E_i^b(x) = 0. \quad (2.32)$$

Das Gaußsche Gesetz ergibt sich ursprünglich aus der Yang-Mills-Lagrangedichte (2.17) als die Euler-Lagrange-Gleichung bezüglich der zeitlichen Komponente  $A_0$  des Eichfeldes. Der

Verlust des Gaußschen Gesetzes steht damit in engem Zusammenhang mit der für die vorliegende Hamiltonsche Formulierung zugrundeliegenden Weyleichung, da innerhalb dieser Eichung die für die Ableitung des Gaußschen Gesetzes wichtige zeitliche Feldkomponente  $A_0$  null gesetzt ist und somit keine dynamische Feldvariable mehr darstellt. Eine einfache Einführung des Gaußschen Gesetzes (2.32) als Operatoridentität ist leider für die kanonisch quantisierte Theorie nicht möglich, da dies im Widerspruch zu den Kommutatorrelationen (2.27) und (2.28) steht.<sup>7</sup>

Für die weitere Diskussion des Gaußschen Gesetzes definieren wir zunächst mit

$$G^a(x) = \frac{1}{g} \hat{D}_i^{ab} \Pi_i^b(x) \quad (2.33)$$

den Gaußschen Operator. Unter Verwendung der Kommutatoralgebra (2.27) und (2.28) läßt sich für die Zeitentwicklung des Operators  $G^a(x)$  die Relation

$$\partial_t G^a(x) = i [H, G^a(x)] = 0 \quad (2.34)$$

ableiten. Damit ist also der Gaußsche Operator  $G^a$  eine Erhaltungsgröße. Das Gaußsche Gesetz kann jetzt in die quantisierte Hamiltonsche Theorie implementiert werden, indem wir fordern, daß lediglich solche Zustände im Hilbertraum von physikalischer Relevanz sind, welche unter der Wirkung des Gaußoperators verschwinden

$$G^a(x)|\Psi\rangle = 0. \quad (2.35)$$

Diese Zwangsbedingung an die Zustände definiert damit den physikalischen Sektor des Hilbertraumes. In diesem Zusammenhang nimmt die obige Relation (2.34) eine besondere Bedeutung ein. Sie garantiert nämlich, daß ein Zustand  $|\Psi\rangle$ , welcher das Gaußsche Gesetz für einen Zeitpunkt  $t$  erfüllt, es dann auch für alle anderen Zeiten  $t'$  erfüllt. Wir werden insbesondere im Abschnitt 2.4, aber auch in den Kapiteln 3 und 4 sehen, zu welchen weitreichenden Konsequenzen die Behandlung dieser Zwangsbedingung führt. Letztlich ist das Gaußsche Gesetz (2.35) die Ursache für die schwierige und komplizierte Behandlung der Yang-Mills-Theorie in der kanonischen Quantisierung.

Der Gaußoperator  $G^a$  besitzt einige interessante Eigenschaften, die wir im folgenden noch kurz diskutieren wollen. Insbesondere vertauscht er an unterschiedlichen Raumpunkten nicht mit sich selbst

$$\left[ G^a(\mathbf{x}, t), G^b(\mathbf{x}', t) \right] = -i f^{abc} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') G^c(\mathbf{x}, t) \quad (2.36)$$

und erfüllt, bis auf das Vorzeichen, die Vertauschungsrelation (2.4) der Generatoren der Lie-Gruppe  $G$ . Ferner ist der Gaußoperator ein Generator für zeitunabhängige Eichtransformationen. Die topologisch trivialen Eichtransformationen der Eichgruppe, welche aus einer stetigen

<sup>7</sup>Unter Verwendung der Kommutatorrelationen (2.27), (2.28) und dem in (2.33) definierten Gaußschen Operator  $G^a(x)$  finden wir für den Kommutator

$$\int d^3 x' \left[ G^a(\mathbf{x}), A_i^b(\mathbf{x}') \right] \alpha^b(\mathbf{x}') = -\frac{i}{g} \hat{D}_i^{ab}(\mathbf{x}) \alpha^b(\mathbf{x}),$$

wobei  $\alpha^b(\mathbf{x})$  eine völlig beliebige Funktion darstellt. Falls wir  $G^a = 0$  als Operatoridentität einführen, müßte allgemein  $\hat{D}_i^{ab}(\mathbf{x}) \alpha^b(\mathbf{x}) = 0$  gelten – und dies ist mit Sicherheit nicht für jede beliebige Funktion  $\alpha^b(\mathbf{x})$  der Fall.

Transformation zur Eins entstehen, können durch das Funktional des Gaußoperators

$$\mathcal{G} = \exp \left( ig \int d^3x \phi^a(\mathbf{x}) G^a(\mathbf{x}) \right) \quad (2.37)$$

aufgebaut werden. Dabei transformieren sich die Koordinaten  $A_i(\mathbf{x})$  und Impulse  $\Pi_i(\mathbf{x})$  durch

$$\mathcal{G} A_i(\mathbf{x}) \mathcal{G}^{-1} = U(\mathbf{x}) \left( A_i(\mathbf{x}) + \frac{i}{g} \partial_i \right) U^\dagger(\mathbf{x}) = A_i^U(\mathbf{x}) \quad (2.38)$$

$$\mathcal{G} \Pi_i(\mathbf{x}) \mathcal{G}^{-1} = U(\mathbf{x}) \Pi_i(\mathbf{x}) U^\dagger(\mathbf{x}) = \Pi_i^U(\mathbf{x}), \quad (2.39)$$

wobei  $U(\mathbf{x}) = \exp(it^a \phi^a(\mathbf{x}))$  die zeitunabhängige Eichtransformation darstellt. Basierend auf dem Transformationsverhalten der kanonischen Variablen  $(A, \Pi)$  läßt sich die Transformation anderer Operatoren leicht berechnen, beispielsweise gilt für das magnetische Feld

$$\mathcal{G} B[A] \mathcal{G}^{-1} = B[\mathcal{G} A \mathcal{G}^{-1}] = B[A^U] = B^U. \quad (2.40)$$

In diesem Zusammenhang ist ein Wellenfunktional  $\Psi[A]$ , dessen Transformationsverhalten unter zeitunabhängigen Eichtransformationen  $U(\mathbf{x})$  ebenfalls durch den Operator  $\mathcal{G}$  beschrieben wird

$$\Psi[A^U] = \Psi[\mathcal{G} A \mathcal{G}^{-1}] = \mathcal{G} \Psi[A] \mathcal{G}^{-1}, \quad (2.41)$$

von besonderem Interesse. Erfüllt dieses Wellenfunktional das Gaußsche Gesetz (2.35), dann gilt  $\mathcal{G} \Psi[A] = \Psi[A] \mathcal{G}$  und damit folgt

$$\Psi[A^U] = \Psi[A]. \quad (2.42)$$

Das als Zwangsbedingung an die Zustände formulierte Gaußsche Gesetz (2.35) garantiert somit die Eichinvarianz des Wellenfunktionals  $\Psi[A]$  unter der verbleibenden Eichfreiheit bezüglich zeitunabhängiger Eichtransformationen.<sup>8</sup> Dieser Sachverhalt begründet die zentrale Bedeutung des Gaußschen Gesetzes, da eine Verletzung dieser Zwangsbedingung automatisch zum Verlust der Eichinvarianz führt.

## 2.3 Das funktionale Schrödingerbild

### 2.3.1 Allgemeine Formulierung

Die übliche Behandlung einer Quantenfeldtheorie basiert auf den Vakuumserwartungswerten zeitgeordneter Produkte von Feldoperatoren (Greensche Funktionen) und deren erzeugenden Funktionalen. Aus diesen Korrelationsfunktionen können dann Informationen über die Dynamik einer Quantenfeldtheorie gewonnen werden. Im Gegensatz dazu ist das funktionale Schrödingerbild ein alternativer Formalismus [26, 27, 28, 29], in dem ähnlich zur gewöhnlichen Quantenmechanik die Zustände, also die Wellenfunktionale, eine zentrale Rolle einnehmen. Sie bilden die Grundlage für die Berechnung der Erwartungswerte von physikalischen Observablen.

<sup>8</sup>Strenggenommen gilt dies lediglich für die topologisch trivialen Eichtransformationen  $U$ , welche durch eine verschwindende Windungszahl  $n[U] = 0$  definiert sind.

Im Schrödingerbild wird der abstrakte Zustand  $|\Psi\rangle$  üblicherweise in der Koordinatendarstellung, also bezüglich des Eichpotentials  $A$ ,

$$\Psi[A] = \langle A|\Psi\rangle \quad (2.43)$$

benutzt. Dabei bezeichnet  $|A\rangle$  den Eigenzustand des Feldoperators<sup>9</sup>  $\hat{A}$  zum Eigenwert  $A$

$$\hat{A}_i^a(\mathbf{x})|A\rangle = A_i^a(\mathbf{x})|A\rangle, \quad (2.44)$$

und demzufolge ist das Wellenfunktional  $\Psi[A]$  in der Koordinatendarstellung

$$\hat{A}_i^a(\mathbf{x})\Psi[A] = A_i^a(\mathbf{x})\Psi[A] \quad (2.45)$$

eine Eigenfunktion der Feldoperatoren  $\hat{A}$ . Alternativ zu der üblicherweise verwendeten Koordinatendarstellung  $\Psi[A]$  kann der Zustand  $|\Psi\rangle$  analog zur gewöhnlichen Quantenmechanik natürlich auch bezüglich einer anderen Basis  $|n\rangle$  dargestellt werden. Ein Beispiel hierfür ist die Impulsdarstellung  $\Psi[\Pi] = \langle \Pi|\Psi\rangle$ , wobei  $|\Pi\rangle$  die Eigenzustände des Impulsoperators  $\hat{\Pi}$  sind, welcher in der Koordinatendarstellung die Form (2.29)

$$\hat{\Pi}_i^a(\mathbf{x}) = \frac{\delta}{i\delta A_i^a(\mathbf{x})} \quad (2.46)$$

besitzt und damit die kanonischen Vertauschungsrelationen (2.27) und (2.28) erfüllt. Während die Feldoperatoren, also beispielsweise  $\hat{A}(\mathbf{x})$  und  $\hat{\Pi}(\mathbf{x})$ , zeitunabhängig sind, enthalten im funktionalen Schrödingerbild die Zustände  $|\Psi\rangle$ , also die Wellenfunktionale  $\Psi[A, t]$ , die komplette Zeitabhängigkeit. Die Zeitentwicklung der Wellenfunktionale  $\Psi[A, t]$  wird durch die funktionale Schrödingergleichung beschrieben, welche in der Koordinatendarstellung die Form

$$i\partial_t\Psi[A, t] = H\left[\hat{A}, \hat{\Pi} = \frac{\delta}{i\delta A}\right]\Psi[A, t] \quad (2.47)$$

besitzt. In der Weyleichung ist der Hamiltonoperator der Yang-Mills-Theorie bezüglich der Koordinatendarstellung durch

$$H_{\text{YM}} = \frac{1}{2} \int d^3x \left[ \frac{\delta}{i\delta A_i^a(\mathbf{x})} \frac{\delta}{i\delta A_i^a(\mathbf{x})} + B_i^a(\mathbf{x})B_i^a(\mathbf{x}) \right] \quad (2.48)$$

gegeben. Die konkrete Berechnung des Erwartungswertes eines Feldoperators  $\hat{O}[\hat{A}, \hat{\Pi}]$  bezüglich eines Zustands  $|\Psi\rangle$  erfolgt im Schrödingerformalismus durch ein Funktionalintegral der Form

$$\langle \Psi|\hat{O}|\Psi\rangle = \int \mathcal{D}A \Psi^*[A]\hat{O}[\hat{A}, \hat{\Pi}]\Psi[A]. \quad (2.49)$$

Das funktionale Schrödingerbild zeichnet sich durch eine starke formale Ähnlichkeit zur gewöhnlichen Quantenmechanik aus. Allerdings besitzt der vorliegende Formalismus im Gegensatz zur gewöhnlichen Quantenmechanik unendlich viele Freiheitsgrade, beinhaltet daher den Impulsoperator in der Koordinatendarstellung als Funktionalableitung und erfordert für die Bestimmung von Observablen die Berechnung von Pfadintegralen. Ein zentraler Vorteil

<sup>9</sup>Zur besseren Unterscheidung zwischen den Operatoren  $\hat{O}$  und den Eigenwerten  $O$  bezeichnen wir in diesem Abschnitt die Operatoren mit einem Dach "^^".

dieser Formulierung besteht in der klaren Wahrscheinlichkeitsinterpretation des Wellenfunktionals  $\Psi[A]$  als Wahrscheinlichkeitsamplitude für das Auftreten der Feldkonfiguration  $A$ . Damit lassen sich Vorstellungen und Ideen, aber auch Ansätze und Methoden, wie etwa das Variationsprinzip, auf den hier vorliegenden Formalismus übertragen.

Das funktionale Schrödingerbild stellt damit eine Alternative zu den üblicherweise in der Quantenfeldtheorie benutzten Pfadintegralmethoden dar. Welcher Formalismus für konkrete Berechnungen vorteilhafter ist, hängt entscheidend von der Problemstellung ab. Beispielsweise ist die Berechnung des Elektronenspektrums des Wasserstoffatoms mit der Pfadintegralmethode sehr kompliziert [30], wohingegen die Behandlung der Schrödingergleichung relativ einfach ist. Dies könnte im Hinblick auf die Behandlung des Niederenergiesektors der Yang-Mills-Theorie ähnlich sein, und insofern ist die Anwendbarkeit des funktionalen Schrödingerbilds für diese Problemstellung eine interessante Fragestellung.

### 2.3.2 Quantenelektrodynamik

Als Anwendungsbeispiel für den Schrödingerformalismus untersuchen wir in diesem Abschnitt den Grundzustand der Elektrodynamik [29]. Insbesondere im Hinblick auf die in den Kapiteln 3 und 4 diskutierte Behandlung des Yang-Mills-Vakuums ist das Grundzustandswellenfunktional der Quantenelektrodynamik (QED) von Interesse.

Der Hamiltonoperator besitzt in der QED dieselbe Form wie in der Yang-Mills-Theorie

$$H_{\text{QED}} = \frac{1}{2} \int d^3x \left[ \Pi_i(\mathbf{x})\Pi_i(\mathbf{x}) + B_i(\mathbf{x})B_i(\mathbf{x}) \right], \quad (2.50)$$

wobei allerdings keine Farbfreiheitsgrade vorhanden sind und das magnetische Feld  $B_i(\mathbf{x}) = (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}))_i$  lediglich als die Rotation der Koordinaten  $A$  auftritt. Für die Behandlung der funktionalen Schrödingergleichung ist es zweckmäßig, sowohl die Koordinaten  $A$  als auch die kanonischen Impulse  $\Pi$  in ihre transversalen und longitudinalen Komponenten zu zerlegen. Dabei besitzt das Eichfeld die Aufspaltung

$$A_i(\mathbf{x}) = A_i^\perp(\mathbf{x}) + A_i^\parallel(\mathbf{x}) \quad (2.51)$$

in die transversale bzw. longitudinale Komponente

$$A_i^\perp(\mathbf{x}) = t_{ij}(\mathbf{x})A_j(\mathbf{x}) \quad \text{mit} \quad t_{ij}(\mathbf{x}) = \delta_{ij} - \frac{\partial_i\partial_j}{\partial^2} \quad (2.52)$$

$$A_i^\parallel(\mathbf{x}) = l_{ij}(\mathbf{x})A_j(\mathbf{x}) \quad \text{mit} \quad l_{ij}(\mathbf{x}) = \delta_{ij} - t_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{\partial_i\partial_j}{\partial^2}. \quad (2.53)$$

Hierin ist  $t_{ij}$  der transversale und  $l_{ij}$  der longitudinale Projektor. Analog dazu hat der Impulsoperator in der Koordinatendarstellung die Form

$$\begin{aligned} \Pi_i(\mathbf{x}) &= \Pi_i^\perp(\mathbf{x}) + \Pi_i^\parallel(\mathbf{x}) \\ \Pi_i(\mathbf{x}) &= t_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{i\delta A_j^\perp(\mathbf{x})} + l_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{i\delta A_j^\parallel(\mathbf{x})}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Unter Verwendung dieser Zerlegung (2.51) und (2.54) in die transversalen und longitudinalen

Anteile erhalten wir für den Hamiltonoperator den Ausdruck

$$H_{\text{QED}} = \frac{1}{2} \int d^3x \left[ \left( t_{in}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{i\delta A_n^\perp(\mathbf{x})} \right) \left( t_{im}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{i\delta A_m^\perp(\mathbf{x})} \right) + \left( l_{in}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{i\delta A_n^\parallel(\mathbf{x})} \right) \left( l_{im}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{i\delta A_m^\parallel(\mathbf{x})} \right) + B_i(\mathbf{x})B_i(\mathbf{x}) \right]. \quad (2.55)$$

Dabei treten in der kinetischen Energie keine gemischten Impulsterme auf, da sich zum einen die Projektoren  $tl = lt = 0$  gegenseitig vernichten und zum anderen davon auszugehen ist, daß die Oberflächenterme aus den partiellen Integrationen verschwinden.

Im Gegensatz zur Yang-Mills-Theorie nimmt das Gaußsche Gesetz (2.35) in der QED eine relativ einfache Form an, da die kovariante Ableitung  $\hat{D}_i(A)$  in die partielle Ableitung  $\partial_i$  übergeht. Mit Verwendung der Zerlegung (2.54) von  $\Pi$  in die Komponenten  $\Pi^\perp$  und  $\Pi^\parallel$  besitzt das Gaußsche Gesetz die Form

$$\partial_i l_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{i\delta A_j^\parallel(\mathbf{x})} \Psi[A^\perp, A^\parallel] = 0. \quad (2.56)$$

Damit erfüllt jedes Wellenfunktional, welches lediglich von den transversalen Freiheitsgraden  $A^\perp$  abhängt, diese Zwangsbedingung. In diesem physikalischen Sektor des Hilbertraumes nimmt der Hamiltonoperator (2.55) eine einfachere Form an

$$H_{\text{QED}} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[ (2\pi)^3 \frac{\delta}{i\delta A_i^\perp(\mathbf{p})} t_{ij}(\mathbf{p}) (2\pi)^3 \frac{\delta}{i\delta A_j^\perp(-\mathbf{p})} + \mathbf{p}^2 B_i(\mathbf{p})B_i(-\mathbf{p}) \right]. \quad (2.57)$$

Dabei benutzen wir für die Koordinaten und Impulse die Fouriertransformation

$$A_i(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} A_i(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} \quad \text{und} \quad \Pi_i(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \Pi_i(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}. \quad (2.58)$$

Das Grundzustandswellenfunktional dieses Hamiltonoperators (2.57) besitzt die Form eines Gaußschen Funktionals

$$\Psi_0[A^\perp] = \mathcal{N} \exp \left[ -\frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} A_i^\perp(\mathbf{p}) |\mathbf{p}| A_i^\perp(-\mathbf{p}) \right], \quad (2.59)$$

wobei  $\mathcal{N}$  die Normierung  $\langle \Psi | \Psi \rangle = 1$  gewährleistet. Da dieses Wellenfunktional das Gaußsche Gesetz (2.56) erfüllt und daher insbesondere invariant bezüglich  $U(1)$ -Eichtransformationen ist, kann dieser Zustand durch eine eichinvariante Größe

$$\Psi_0[A^\perp] = \mathcal{N} \exp \left[ -\frac{1}{2} \int d^3x d^3x' \frac{B_i(\mathbf{x})B_i(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] \quad (2.60)$$

dargestellt werden. Der Energieeigenwert dieses Zustandes  $\Psi_0$ , also die Grundzustandsenergie, ist durch

$$E_0 = \frac{1}{2} \int d^3x e_0(\mathbf{x}) \quad (2.61)$$

bestimmt. Dabei bezeichnet

$$e_0(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega(\mathbf{p}) \quad \text{mit} \quad \omega(\mathbf{p}) = |\mathbf{p}|$$

die Vakuumenergiedichte und  $\omega(\mathbf{p})$  die Photonenergie.

## 2.4 Minimale Coulombeichung – Gribov-Problem

Die im Abschnitt 2.2 diskutierte kanonische Quantisierung der Yang-Mills-Theorie in der Weyleichung  $A_0 = 0$  beinhaltet eine verbleibende Eichinvarianz bezüglich zeitunabhängiger Eichtransformationen  $U(\mathbf{x}) = \exp(it^a \phi^a(\mathbf{x}))$ . Damit repräsentieren zwei Feldkonfigurationen  $A$  und  $A'$ , welche durch eine Eichtransformation  $U(\mathbf{x})$  miteinander verknüpft sind  $A' = A^U$ , denselben physikalischen Zustand und sind somit völlig gleichberechtigt. Die Menge der zu  $A$  äquivalenten Feldkonfigurationen definiert den Eichorbit

$$\mathcal{O}_A \equiv \left\{ A^U : A^U = UAU^\dagger + \frac{i}{g}U\partial U^\dagger, U \in G \right\} \quad (2.62)$$

und bildet die Äquivalenzklasse von  $A$ , wobei die Eichtransformation die Rolle der Äquivalenzrelation einnimmt.<sup>10</sup> Aufgrund dieser mathematischen Struktur kann es nicht vorkommen, daß sich zwei Eichorbits schneiden.<sup>11</sup> In diesem Zusammenhang garantiert das bereits diskutierte Gaußsche Gesetz (2.35) für die Feldkonfigurationen innerhalb eines Eichorbits dieselbe Wahrscheinlichkeitsamplitude.<sup>12</sup>

Der physikalische Konfigurationsraum ist durch die Menge der Eichorbits, also den Quotientenraum  $\mathcal{P} = \mathcal{A}/\mathcal{G}$  definiert, wobei  $\mathcal{A}$  den Raum der Eichfelder und  $\mathcal{G}$  den Raum der lokalen Eichtransformationen darstellt. Eine vollständige Eichfixierung, welche insbesondere im Hinblick auf die Auflösung des Gaußschen Gesetzes (2.35) von Interesse ist, besteht in der eindeutigen Auswahl genau eines Repräsentanten aus jedem Eichorbit. Dadurch werden die redundanten Freiheitsgrade eliminiert, welche aufgrund der Eichinvarianz vorhanden sind, und demzufolge enthält die resultierende Theorie nach der Eichfixierung ausschließlich physikalische Freiheitsgrade.

Da wir in der vorliegenden Arbeit die Yang-Mills-Theorie in der Coulombeichung untersuchen, werden wir im folgenden die Eichfixierung der Coulombeichung

$$\partial_i A_i(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.63)$$

diskutieren. Ausgehend von einer transversalen Eichkonfiguration  $A$ , welche die Eichbedingung (2.63) erfüllt, können wir mit  $A^U = UAU^\dagger + \frac{i}{g}U\partial U^\dagger$  die zu  $A$  äquivalenten Eichkonfigurationen entlang des Eichorbits  $\mathcal{O}_A$  betrachten. Wenn die hier eingeführte Transversalitätsbedingung (2.63) eine vollständige Eichfixierung garantiert, dann darf entlang des Eichorbits  $\mathcal{O}_A$  keine weitere transversale Feldkonfiguration mehr existieren und damit die Gleichung

$$\partial_i A_i^U(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.64)$$

unter Verwendung geeigneter Randbedingungen für  $U(\mathbf{x})$  lediglich die triviale Lösung  $U(\mathbf{x}) = C$  besitzen. In seiner berühmten Arbeit [31] zeigt Gribov, daß im Fall einer nicht-abelschen

<sup>10</sup>Zwei Eichkonfigurationen  $A, A'$  sind zueinander äquivalent  $A \sim A'$ , falls es eine Eichtransformation  $U \in G$  gibt, welche beide Konfigurationen miteinander verbindet:  $A' = A^U$ . Es läßt sich leicht zeigen, daß diese Relation reflektiv, antisymmetrisch und transitiv ist und somit tatsächlich eine Äquivalenzrelation vorliegt. Damit erfüllt  $\mathcal{O}_A$  die Eigenschaften einer Äquivalenzklasse.

<sup>11</sup>Angenommen die beiden Eichorbits  $\mathcal{O}_A$  und  $\mathcal{O}_{A'}$  besitzen einen gemeinsamen Schnittpunkt  $C$ , d. h. es gilt  $C \in \mathcal{O}_A$  und  $C \in \mathcal{O}_{A'}$ . Dann sind aufgrund der Äquivalenzrelation sowohl  $A \sim C$  als auch  $A' \sim C$  zu  $C$  äquivalent. Wegen der transitiven Eigenschaft der Äquivalenzrelation ist damit auch  $A \sim A'$  zu  $A'$  äquivalent und somit stimmen die beiden Äquivalenzklassen überein  $\mathcal{O}_A \equiv \mathcal{O}_{A'}$ .

<sup>12</sup>Zumindest für diejenigen Feldkonfigurationen, welche durch eine topologisch triviale Eichtransformation verknüpft sind.

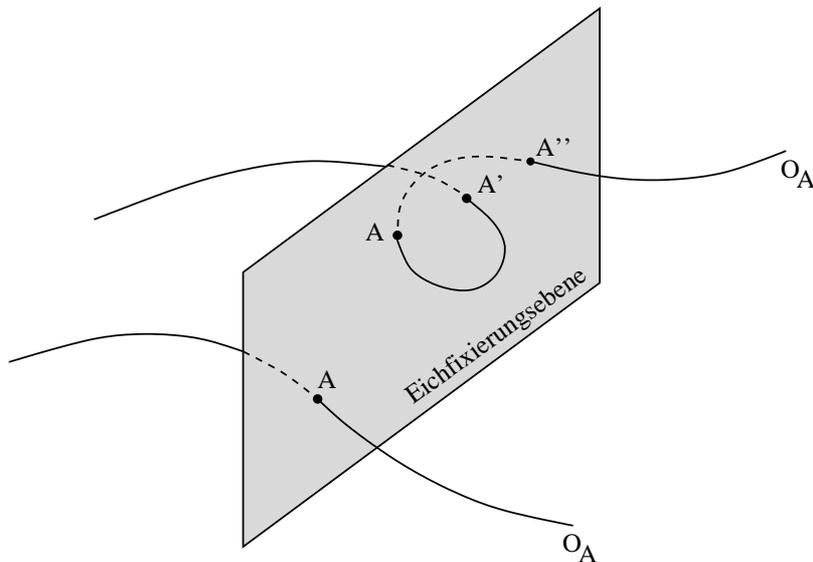


Abbildung 2.1: Die Eichfixierungsbedingung, repräsentiert durch die Hyperebene, bestimmt die transversale Eichkonfiguration  $A$  als Repräsentant des Eichorbits  $\mathcal{O}_A$ . Diese Eichfixierung ist jedoch nicht eindeutig, da einige Eichorbits weitere transversale Feldkonfigurationen  $A'$  und  $A''$ , die sogenannten Gribovkopien, enthalten.

Eichtheorie die Gleichung (2.64) in der Tat nichttriviale Lösungen hat und damit insbesondere die Transversalitätsbedingung (2.63) noch keine eindeutige Eichfixierung garantiert. Demzufolge existieren unterschiedliche transversale Feldkonfigurationen  $A$  und  $A'$  mit  $\partial_i A_i = \partial_i A'_i = 0$ , welche über eine Eichtransformation  $U$  miteinander verknüpft sind  $A' = A^U$  und daher demselben Eichorbit  $\mathcal{O}_A$  angehören (siehe Abb. 2.1). Die Anwesenheit der Konfiguration  $A'$ , einer sogenannten Gribovkopie von  $A$ , hat einen deutlichen Einfluß auf die Dynamik des Quantensystems, da sie dieselbe physikalische Konfiguration wie  $A$  repräsentiert. Die Existenz solcher Eichkopien, selbst nach Einführung der Transversalitätsrelation (2.63), wird allgemein als das Gribov-Problem bezeichnet.

Eine Möglichkeit, diese verbleibenden Eichkopien zu eliminieren und damit das Gribov-Problem zumindest formal zu lösen, besteht in der Verwendung eines geeigneten Funktionals zur Eichfixierung [32, 33, 34, 35]. Dieses zu minimierende Funktional kann durch die  $L^2$ -Norm der Vektorpotentiale

$$F_A[U] \equiv \|A^U\|^2 = \int d^3x \operatorname{tr} (A_i^U(\mathbf{x}) A_i^U(\mathbf{x})) \quad (2.65)$$

mit

$$A_i^U(\mathbf{x}) = U(\mathbf{x}) A_i(\mathbf{x}) U^\dagger(\mathbf{x}) + \frac{i}{g} U(\mathbf{x}) \partial_i U^\dagger(\mathbf{x}) \quad (2.66)$$

entlang des Eichorbits  $\mathcal{O}_A$  definiert werden. Für die weitere Diskussion betrachten wir das Verhalten des Funktionals um ein Minimum (o.B.d.A. bei  $U = \mathbb{1}$ ), indem wir mit  $U(\mathbf{x}) = \exp(it^a \phi^a(\mathbf{x}))$  kleine Abweichungen untersuchen. Eine entsprechende Entwicklung von  $F_A[U]$

um das Minimum  $U =$  führt auf die folgende Reihendarstellung in  $\phi$

$$F_A[U] = \|A^U\|^2 = \|A\|^2 - \frac{2}{g} \int d^3x \operatorname{tr} [\phi(\mathbf{x}) (\partial_i A_i(\mathbf{x}))] + \frac{1}{g^2} \int d^3x \operatorname{tr} \left[ \phi(\mathbf{x}) \left( -\partial_i \hat{D}_i(\mathbf{x}) \right) \phi(\mathbf{x}) \right] + \mathcal{O}(\phi^3). \quad (2.67)$$

Falls die Feldkonfiguration  $A$  ein lokales Minimum darstellt, muß zum einen der zweite Term der Entwicklung (2.67) verschwinden, und zum anderen der dritte Term für alle Funktionen  $\phi$  positiv sein. Dies impliziert insbesondere, daß die Feldkonfiguration  $A$  des Minimums transversal ist  $\partial_i A_i = 0$  und andererseits der Faddeev-Popov-Operator  $M(A) = -\partial_i \hat{D}_i(\mathbf{x})$  für dieses Eichfeld  $A$  positiv definit ist.<sup>13</sup> Die Menge aller *lokalen* Minima des Funktionals  $F_A[U]$  wird als Gribovregion

$$\Omega \equiv \left\{ A : \partial_i A_i = 0 \text{ und } M(A) = -\partial_i \hat{D}_i(A) \geq 0 \right\} \quad (2.68)$$

bezeichnet und enthält insbesondere die transversale Konfiguration  $A = 0$ . Auf dem Rand  $\partial\Omega$  dieser Region  $\Omega$ , dem sogenannten Gribov-Horizont, verschwindet der kleinste Eigenwert des Faddeev-Popov-Operators  $M(A)$ , und demzufolge bilden die Feldkonfigurationen auf  $\partial\Omega$  Koordinatensingularitäten. Ferner läßt sich zeigen [11, 36], daß die Eichkonfigurationen auf dem Gribov-Horizont  $\partial\Omega$  einen endlichen Abstand zum Ursprung  $A = 0$  besitzen. Da selbst die Gribovregion  $\Omega$  immer noch Eichkopien beinhaltet, muß dieser Bereich weiter eingeschränkt werden.

Die vollständige Eichfixierung, also die eindeutige Bestimmung eines Repräsentanten aus jedem Eichorbit, wird durch die Wahl derjenigen Feldkonfigurationen des Eichorbits realisiert, für die das Funktional  $F_A[U]$  sein *absolute* Minimum annimmt. Die Menge dieser Eichfeldkonfigurationen

$$\Lambda \equiv \{ A : F_A[A] \leq F_A[U], \forall U \in G \} \quad (2.69)$$

definiert die sogenannte „fundamental modular region“ (FMR) und ist eine echte Teilmenge  $\Lambda \subset \Omega$  der Gribovregion. Sowohl die Gribovregion  $\Omega$  als auch die FMR  $\Lambda$  sind konvexe Mengen, da die Feldkonfigurationen  $A = \alpha A' + (1 - \alpha) A''$  mit  $\alpha \in [0, 1]$  in  $\Omega$  bzw.  $\Lambda$  enthalten sind, falls  $A'$  und  $A''$  in  $\Omega$  bzw.  $\Lambda$  liegen. Der innere Bereich der FMR  $\Lambda$  enthält keine Gribovkopien mehr. Lediglich auf dem Rand  $\partial\Lambda$  der FMR existieren noch Gribovkopien, welche auf entartete, absolute Minima des Funktionals  $F_A[U]$  zurückzuführen sind.

Für die Diskussion der Gribovkopien auf dem Rand  $\partial\Lambda$  (siehe [35]) wählen wir, wie in der Abb. 2.2 dargestellt, zunächst einen Punkt  $P$ , der in der Gribovregion  $\Omega$ , aber nicht in der FMR  $\Lambda$  liegt. Da diese Feldkonfiguration am Punkt  $P$  nicht in  $\Lambda$  liegt und somit nur ein lokales Minimum von  $F_A[U]$  darstellt, muß es entlang des Eichorbits der Feldkonfiguration in  $P$  ein absolutes Minimum  $P'$  geben, welches in der FMR  $\Lambda$  liegt. Wir betrachten nun die Verschiebung des Punktes  $P$  entlang eines Strahls, der durch den Ursprung  $A = 0$  läuft, bis zum Rand  $\partial\Lambda$  der FMR. Aufgrund der Stetigkeit des Eichorbits und der Eindeutigkeit des absoluten Minimums  $P'$  im Inneren der FMR [34] muß dieses zu  $P$  korrespondierende, absolute Minimum  $P'$  sich auf den Rand  $\partial\Lambda$  zubewegen und dabei in ein lokales Minimum übergehen, wenn der Punkt  $P$  auf dem Strahl durch  $A = 0$  zum Rand  $\partial\Lambda$  der FMR wandert.

<sup>13</sup>Der Operator  $M(A)$  ist positiv definit, falls für alle Funktionen  $\phi(\mathbf{x})$  gilt  $\int d^3x \phi(\mathbf{x}) M(A) \phi(\mathbf{x}) \geq 0$ . Im folgenden bezeichnen wir diese Eigenschaft einfach mit  $M(A) \geq 0$ .

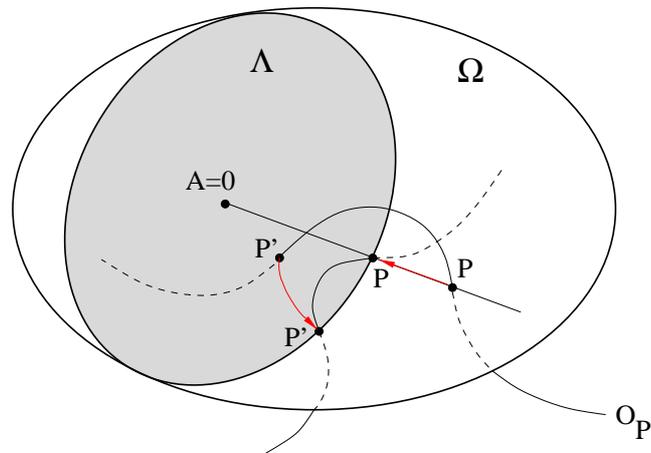


Abbildung 2.2: Das lokale Minimum in  $P$  geht am Rand  $\partial\Lambda$  der FMR in ein absolutes Minimum von  $F_A[U]$  über, wobei sich das dazu korrespondierende, auf demselben Eichorbit liegende absolute Minimum  $P'$  auf den Rand  $\partial\Lambda$  zubewegt. Wenn sowohl der Punkt  $P$  als auch der Punkt  $P'$  auf dem Rand  $\partial\Lambda$  liegen, ist die Norm  $\|A^U\|$  entartet, und damit liegen zwei völlig äquivalente Eichkonfigurationen vor.

Wenn damit sowohl der Punkt  $P$  als auch der Punkt  $P'$  auf dem Rand  $\partial\Lambda$  liegen, hat das Funktional  $F_A[U]$  zwei absolute Minima, und dementsprechend liegen zwei völlig äquivalente Eichfelder vor. Diese so entstandene Entartung der Norm  $\|A^U\|$  ist damit die Ursache für die Existenz von Gribovkopien auf dem Rand  $\partial\Lambda$  der FMR.

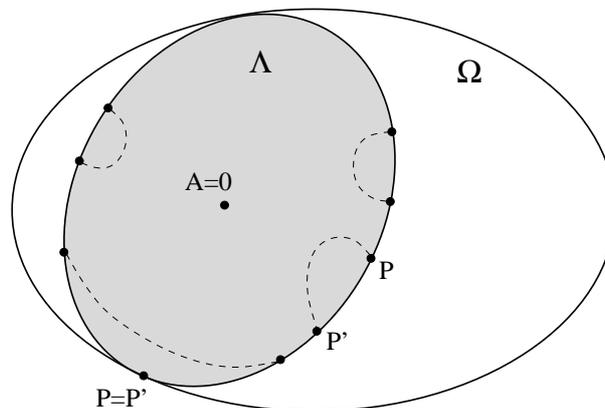


Abbildung 2.3: Die gestrichelten Linien deuten die Identifikation äquivalenter Randpunkte der FMR an.

Die Identifikation äquivalenter Randpunkte auf  $\partial\Lambda$ , wie etwa die Punkte  $P$  und  $P'$ , verursacht eine nichttriviale Topologie der FMR und bewirkt die vollständige Eichfixierung der Coulombbeichung. Diese Kompaktifizierung des Randes  $\partial\Lambda$  der FMR ist in der Abb. 2.3 dargestellt. Ein besonders interessanter Fall tritt dann auf, wenn die zwei zu identifizierenden Randpunkte  $P$  und  $P'$  bereits aufeinanderliegen. Da für solche Verhältnisse das eichfixie-

rende Funktional  $F_A[U]$  (2.67) an der Stelle  $U =$  zwei Minima besitzt, muß dann der Faddeev-Popov-Operator  $M(A)$  im dritten Term der Entwicklung (2.67) zumindest einen verschwindenden Eigenwert haben. Aufgrund dessen liegen die Punkte  $P$  und  $P'$  nicht nur auf  $\partial\Lambda$ , sondern auch auf dem Rand  $\partial\Omega$  der Gribovregion. Damit berührt die FMR den Rand  $\partial\Omega$  und beinhaltet somit Feldkonfigurationen, für die der Faddeev-Popov-Operator Nullmoden besitzt. Diese Eigenschaft ist im Hinblick auf die nicht-perturbativen Eigenschaften der Yang-Mills-Theorie, wie etwa den Farbeinschluß der Quarks, von zentraler Bedeutung. Jeder Punkt  $P$  auf dem Rand  $\partial\Lambda$  nimmt in irgendeiner Form an der Kompaktifizierung der FMR teil, da die obige Argumentation, basierend auf dem Strahl durch den Ursprung  $A = 0$ , für jeden beliebigen Randpunkt anwendbar ist.

Da die zu identifizierenden Randpunkte  $P$  und  $P'$ , welche durch eine Entartung der Norm  $\|A^U\|$  entstehen, auf demselben Eichorbit liegen und damit durch eine Eichtransformation verknüpft sind, müssen die physikalischen Wellenfunktionale identisch unter dieser Randidentifikation bleiben. Dabei kann sich allerdings für Randpunkte  $P$  und  $P'$ , welche durch eine Eichtransformation mit nichttrivialer Homotopie verbunden sind, möglicherweise die Phase des Wellenfunktionals ändern.

## 2.5 Faddeev-Popov-Eichfixierung und Auflösung des Gaußschen Gesetzes

Der physikalische Sektor des Hilbertraumes ist im Fall der Yang-Mills-Theorie ein echter Unterraum des gesamten Hilbertraumes und durch Zustände definiert, welche unter der Wirkung des Gaußoperators (2.33) verschwinden. Im Gegensatz zur Elektrodynamik, in welcher der physikalische Sektor des Hilbertraumes einfach zu bestimmen ist (siehe Abschnitt 2.3.2), sind die Verhältnisse für die nicht-abelsche Theorie deutlich komplizierter. Eine Möglichkeit zur Behandlung der Zwangsbedingung (2.35) an die physikalischen Zustände besteht in der Auflösung des Gaußschen Gesetzes durch eine Fixierung der Eichung – im vorliegenden Fall der Coulombeichung.

Anstelle der expliziten Transformation des Gaußschen Gesetzes und des Hamiltonoperators in die gekrümmten Koordinaten der Coulombeichung, die ursprünglich von Christ und Lee [18] durchgeführt wurde und welche wir im nächsten Abschnitt diskutieren werden, benutzen wir im vorliegenden Abschnitt die Faddeev-Popov-Methode zur Eichfixierung und lösen dabei das Gaußsche Gesetz auf. Dazu verwenden wir die Aufspaltung des Impulsoperators (2.46) in den transversalen und longitudinalen Anteil

$$\Pi_i^a(\mathbf{x}) = \Pi_i^{\perp a}(\mathbf{x}) - \partial_i \theta^a(\mathbf{x}) \quad (2.70)$$

und betrachten unter Benutzung dieser Relation zunächst das Gaußsche Gesetz (2.35) in der Form

$$-\frac{1}{g} \hat{D}_i^{ab}(\mathbf{x}) \partial_i \theta^b(\mathbf{x}) \Psi[A] = \rho^a(\mathbf{x}) \Psi[A]. \quad (2.71)$$

Dabei stellt

$$\rho^a(\mathbf{x}) = -f^{abc} A_i^b(\mathbf{x}) \Pi_i^{\perp c}(\mathbf{x}) + \rho_{\text{ext}}^a(\mathbf{x}) \quad (2.72)$$

den Ladungsdichteoperator dar, der im Vergleich zu (2.35) neben der Farbladungsdichte der Gluonen auch die Farbladungsdichte  $\rho_{\text{ext}}$  von externen Feldern beinhaltet. Für die weitere

Diskussion dieser Zwangsbedingung bezüglich der physikalischen Zustände benutzen wir die folgende Umformung der linken Seite von (2.71)

$$\begin{aligned} -\frac{1}{g}\hat{D}_i^{ab}(\mathbf{x})\partial_i\theta^b(\mathbf{x})\Psi[A] &= -\frac{1}{g}\int d^3x'\hat{D}_i^{ab}(\mathbf{x})\partial_i^x\delta^{bc}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\theta^c(\mathbf{x}')\Psi[A] \\ &= \int d^3x'\langle\mathbf{x}a|-\frac{1}{g}\hat{D}_i\partial_i|\mathbf{x}'c\rangle\theta^c(\mathbf{x}')\Psi[A] \end{aligned} \quad (2.73)$$

und erhalten damit für das Gaußsche Gesetz die Darstellung

$$\int d^3x'\langle\mathbf{x}a|-\frac{1}{g}\hat{D}_i\partial_i|\mathbf{x}'b\rangle\theta^b(\mathbf{x}')\Psi[A] = \rho^a(\mathbf{x})\Psi[A]. \quad (2.74)$$

Der Faddeev-Popov-Operator  $M(A) = -\hat{D}_i(A)\partial_i$  ist für transversale Eichfelder symmetrisch

$$\langle\mathbf{x}a|(-\hat{D}_i(A^\perp)\partial_i)^{-1}|\mathbf{x}'b\rangle = \langle\mathbf{x}'b|(-\hat{D}_i(A^\perp)\partial_i)^{-1}|\mathbf{x}a\rangle \quad (2.75)$$

und besitzt, wie bereits im letzten Abschnitt diskutiert, für Feldkonfigurationen, die im Innern der FMR  $\Lambda$  liegen, ausschließlich positive Eigenwerte. Lediglich am Rand  $\partial\Lambda$  der FMR treten verschwindende Eigenwerte von  $M(A)$  auf. Demzufolge ist der Faddeev-Popov-Operator  $M(A)$  im Inneren der FMR invertierbar, und daher gilt insbesondere für solche Feldkonfigurationen

$$\theta^a(\mathbf{x})\Psi[A] = g\int d^3x'\left\langle\mathbf{x}a\left|(-\hat{D}_i(A)\partial_i)^{-1}\right|\mathbf{x}'b\right\rangle\rho^b(\mathbf{x}')\Psi[A]. \quad (2.76)$$

Für die Fixierung der Coulombbeichung benutzen wir die Faddeev-Popov-Identität [37]

$$1 = \int \mathcal{D}U\delta(\partial_i A_i^U)\chi(A^U)\det(-\partial_i\hat{D}_i(A^U)), \quad (2.77)$$

wobei der Term  $\delta(\partial_i A_i^U)\chi(A^U)$  die Restriktion der Eichfelder auf die FMR garantiert. Dabei gilt  $\chi(A) = 1$  für Feldkonfigurationen  $A \in \text{FMR}$  innerhalb der FMR und  $\chi(A) = 0$  für alle anderen transversalen Eichfelder.

Im folgenden diskutieren wir die Berechnung des Matrixelements  $\langle\Phi|\mathcal{O}[A]|\Psi\rangle$  eines Operators  $\mathcal{O}[A]$  als Pfadintegral über die transversalen Feldkonfigurationen  $A^\perp$  des physikalischen Konfigurationsraumes  $\Lambda$ . Dabei sollen sowohl die Zustände  $\Psi[A^U] = \Psi[A]$  (analog  $\Phi$ ) als auch der Operator  $\mathcal{O}[A^U] = \mathcal{O}[A]$  eichinvariant sein. Mit Verwendung der Faddeev-Popov-Identität (2.77) folgt dann für das Matrixelement

$$\begin{aligned} \langle\Phi|\mathcal{O}[A]|\Psi\rangle &= \int \mathcal{D}A\Phi[A]^*\mathcal{O}[A]\Psi[A] \\ &= \int \mathcal{D}A\int \mathcal{D}U\delta(\partial_i A_i^U)\chi(A^U)\det(-\partial_i\hat{D}_i(A^U))\Phi[A]^*\mathcal{O}[A]\Psi[A] \\ &= \int \mathcal{D}U\int \mathcal{D}A\delta(\partial_i A_i^U)\chi(A^U)\det(-\partial_i\hat{D}_i(A^U))\Phi[A^U]^*\mathcal{O}[A^U]\Psi[A^U]. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Für die weitere Umformung benötigen wir die Invarianz des Pfadintegralmaßes  $\mathcal{D}A$  unter lokalen Eichtransformationen  $U(\mathbf{x})$ . Diese Eigenschaft resultiert unmittelbar aus der Relation (2.10) für die lokale Eichtransformation der Gluonfelder  $A$ , indem wir diese Gleichung mit

dem Generator  $t^b$  multiplizieren und die Spur im Farbraum bilden. Dadurch finden wir den Zusammenhang

$$(A^U)_i^b = 2A_i^a \text{tr} \left( U t^a U^\dagger t^b \right) + 2 \frac{i}{g} U \left( U \partial_i U^\dagger t^b \right) \quad (2.79)$$

und erhalten damit unter Verwendung der Relation  $\hat{U}^{ba} t^b = U t^a U^\dagger$  und der Tatsache, daß  $\hat{U}^{ba}$  orthogonal ist, für den Betrag der Determinante der Koordinatentransformation  $A^U \rightarrow A$

$$\left| \det \left( \frac{\delta (A^U)_i^b(\mathbf{x})}{\delta A_j^a(\mathbf{x}')} \right) \right| = \left| \det \left( \delta_{ij} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \hat{U}^{ba}(\mathbf{x}') \right) \right| = 1. \quad (2.80)$$

Dies impliziert die Eichinvarianz des Pfadintegralmaßes  $\mathcal{D}A$  und ermöglicht die folgende Umformung des Matrixelements (2.78)

$$\begin{aligned} \langle \Phi | \mathcal{O}[A] | \Psi \rangle &= \int \mathcal{D}U \int \mathcal{D}A^U \delta(\partial_i A_i^U) \chi(A^U) \det \left( -\partial_i \hat{D}_i(A^U) \right) \Phi[A^U]^* \mathcal{O}[A^U] \Psi[A^U] \\ &= \int \mathcal{D}U \int \mathcal{D}A' \delta(\partial_i A_i') \chi(A') \det \left( -\partial_i \hat{D}_i(A') \right) \Phi[A']^* \mathcal{O}[A'] \Psi[A'] \\ &= \left( \int \mathcal{D}U \right) \int \mathcal{D}A \delta(\partial_i A_i) \chi(A) \det \left( -\partial_i \hat{D}_i(A) \right) \Phi[A]^* \mathcal{O}[A] \Psi[A] \end{aligned} \quad (2.81)$$

und schließlich für die Berechnung von Erwartungswerten innerhalb der Coulombeichung die Darstellung als Pfadintegral über die transversalen Feldkonfigurationen des physikalischen Konfigurationsraumes  $\Lambda$

$$\langle \Phi | \mathcal{O}[A] | \Psi \rangle = \mathcal{N} \int_{\Lambda} \mathcal{D}A^\perp \mathcal{J}[A^\perp] \Phi[A^\perp]^* \mathcal{O}[A^\perp] \Psi[A^\perp]. \quad (2.82)$$

Dabei repräsentiert die Faddeev-Popov-Determinante

$$\mathcal{J}[A^\perp] = \det \left( -\partial_i \hat{D}_i(A^\perp) \right) \quad (2.83)$$

das nichttriviale Integrationsmaß im gekrümmten Koordinatenraum  $\Lambda$  und die irrelevante Normierungskonstante  $\mathcal{N} = \int \mathcal{D}U$  das unendliche Gruppenvolumen des Eichorbits.

Ein einfacher Anwendungsfall für diese Relation (2.82) zur Berechnung von Matrixelementen ist der Potentialterm des Hamiltonoperators (2.48)

$$H_P = \frac{1}{2} \int d^3x B_i^a(\mathbf{x}) B_i^a(\mathbf{x}). \quad (2.84)$$

Dieser Term  $H_P[A]$  ist eichinvariant, und demzufolge können wir insbesondere für die Berechnung von Erwartungswerten einfach  $H_P[A^\perp]$  benutzen. Im Vergleich dazu ist die Behandlung des kinetischen Terms des Hamiltonoperators (2.48) komplizierter. Für die Berechnung verschiedener Matrixelemente des kinetischen Terms von (2.48) benutzen wir zunächst die Umformung

$$\begin{aligned} \langle \Phi | H_T | \Psi \rangle &= \frac{1}{2} \int d^3x \int \mathcal{D}A \Phi[A]^* \Pi_i^a(\mathbf{x}) \Pi_i^a(\mathbf{x}) \Psi[A] \\ &= -\frac{1}{2} \int d^3x \int \mathcal{D}A (\Pi_i^a(\mathbf{x}) \Phi[A]^*) (\Pi_i^a(\mathbf{x}) \Psi[A]), \end{aligned} \quad (2.85)$$

wobei wir eine partielle Integration im Pfadintegral durchführen, den Gaußschen Satz anwenden und davon ausgehen, daß aufgrund der Normierbarkeit der Wellenfunktionale  $\Phi$  und  $\Psi$  keine Oberflächenterme auftreten. Aufgrund der homogenen Transformation (2.39) des Impulsoperators  $\Pi$  unter Eichtransformation ist der kinetische Term des Hamiltonoperators (2.48) eichinvariant. Demzufolge ist der Integrand des Pfadintegrals (2.85), eichinvariante Wellenfunktionale  $\Phi$  und  $\Psi$  vorausgesetzt, ebenfalls eichinvariant, und daher sind alle Schritte zur Ableitung der auf den transversalen Freiheitsgraden basierenden Darstellung auch auf das Matrixelement (2.85) anwendbar. Ausgehend von der auf (2.81) basierenden Darstellung

$$\langle \Phi | H_T | \Psi \rangle = -\frac{1}{2} \int d^3x \mathcal{N} \int \mathcal{D}A \delta(\partial_i A_i) \chi(A) \mathcal{J}[A] (\Pi_i^a(\mathbf{x}) \Phi[A]^*) (\Pi_i^a(\mathbf{x}) \Psi[A]) \quad (2.86)$$

benutzen wir zunächst die Aufspaltung des Impulsoperators (2.70) in den transversalen und longitudinalen Anteil und erhalten dadurch

$$\begin{aligned} \langle \Phi | H_T | \Psi \rangle &= -\frac{1}{2} \int d^3x \mathcal{N} \int \mathcal{D}A \delta(\partial_i A_i) \chi(A) \mathcal{J}[A] \\ &\quad \left[ \left( \Pi_i^{\perp a}(\mathbf{x}) - \partial_i \theta^a(\mathbf{x}) \right) \Phi[A]^* \right] \left[ \left( \Pi_i^{\perp a}(\mathbf{x}) - \partial_i \theta^a(\mathbf{x}) \right) \Psi[A] \right] \\ &= -\frac{1}{2} \int d^3x \mathcal{N} \int \mathcal{D}A \delta(\partial_i A_i) \chi(A) \mathcal{J}[A] \\ &\quad \left[ \left( \Pi_i^{\perp a}(\mathbf{x}) \Phi[A]^* \right) \left( \Pi_i^{\perp a}(\mathbf{x}) \Psi[A] \right) + \left( \partial_i \theta^a(\mathbf{x}) \Phi[A]^* \right) \left( \partial_i \theta^a(\mathbf{x}) \Psi[A] \right) \right]. \quad (2.87) \end{aligned}$$

Aufgrund der Transversalität des Impulsoperators  $\Pi^\perp$ , d. h.  $\partial_i \Pi_i^\perp = 0$ , treten in diesem Ausdruck keine gemischten Terme auf. Wir sind an dieser Stelle in der Lage, das Gaußsche Gesetz (2.71), also die Zwangsbedingung für physikalische Zustände, in (2.87) zu implementieren. Die Wirkung des longitudinalen Impulsoperators  $\partial_i \theta$  auf die physikalischen Wellenfunktionale  $\Phi$  und  $\Psi$  ist nicht unabhängig, sondern aufgrund des Gaußschen Gesetzes durch die Relation (2.76) mit der Wirkung des transversalen Impulses  $\Pi^\perp$  und den äußeren Ladungen verknüpft. Die Benutzung dieses Zusammenhangs (2.76) im Matrixelement (2.87) ist gerechtfertigt, da im Pfadintegral von (2.87) lediglich Feldkonfigurationen  $A$  aus der FMR Beiträge liefern. Damit erhalten wir für das Matrixelement

$$\begin{aligned} \langle \Phi | H_T | \Psi \rangle &= -\frac{1}{2} \int d^3x \mathcal{N} \int \mathcal{D}A \delta(\partial_i A_i) \chi(A) \mathcal{J}[A] \left[ \left( \Pi_i^{\perp a}(\mathbf{x}) \Phi[A]^* \right) \left( \Pi_i^{\perp a}(\mathbf{x}) \Psi[A] \right) \right. \\ &\quad \left. + g^2 \left( \partial_i \int d^3x' \langle \mathbf{x}a | (-\hat{D}_i(A) \partial_i)^{-1} | \mathbf{x}'b \rangle \rho^b(\mathbf{x}') \Phi[A]^* \right) \right. \\ &\quad \left. \left( \partial_i \int d^3x'' \langle \mathbf{x}a | (-\hat{D}_j(A) \partial_j)^{-1} | \mathbf{x}''c \rangle \rho^c(\mathbf{x}'') \Psi[A] \right) \right], \quad (2.88) \end{aligned}$$

und entsprechend zu (2.82) die Darstellung bezüglich der transversalen Feldkonfigurationen im Konfigurationsraum  $\Lambda$

$$\begin{aligned} \langle \Phi | H_T | \Psi \rangle = & -\frac{1}{2} \int d^3x \mathcal{N} \int_{\Lambda} \mathcal{D}A^{\perp} \mathcal{J}[A^{\perp}] \left[ \left( \Pi_i^{\perp a}(\mathbf{x}) \Phi[A^{\perp}]^* \right) \left( \Pi_i^{\perp a}(\mathbf{x}) \Psi[A^{\perp}] \right) \right. \\ & + g^2 \left( \partial_i \int d^3x' \langle \mathbf{x}a | (-\partial_i \hat{D}_i(A^{\perp}))^{-1} | \mathbf{x}'b \rangle \rho^b(\mathbf{x}') \Phi[A^{\perp}]^* \right) \\ & \left. \left( \partial_i \int d^3x'' \langle \mathbf{x}a | (-\partial_j \hat{D}_j(A^{\perp}))^{-1} | \mathbf{x}''c \rangle \rho^c(\mathbf{x}'') \Psi[A^{\perp}] \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Die Anwendung einer partiellen Integration im Pfadintegral unter der Annahme verschwindender Oberflächenterme führt beim ersten Term in (2.89) zu dem Ausdruck

$$\langle \Phi | H_k | \Psi \rangle \equiv \frac{1}{2} \int d^3x \mathcal{N} \int_{\Lambda} \mathcal{D}A^{\perp} \mathcal{J}[A^{\perp}] \Phi[A^{\perp}]^* \mathcal{J}[A^{\perp}]^{-1} \Pi_i^{\perp a}(\mathbf{x}) \mathcal{J}[A^{\perp}] \Pi_i^{\perp a}(\mathbf{x}) \Psi[A^{\perp}]. \quad (2.90)$$

Damit repräsentiert

$$H_k = \frac{1}{2} \int d^3x \mathcal{J}[A^{\perp}]^{-1} \Pi_i^{\perp a}(\mathbf{x}) \mathcal{J}[A^{\perp}] \Pi_i^{\perp a}(\mathbf{x}) \quad (2.91)$$

den Teil des Hamiltonoperators in Coulombbeichung, welcher durch den transversalen Impuls  $\Pi^{\perp}$  zustandekommt. Eine entsprechende partielle Integration des zweiten Terms in (2.89), welcher auf den longitudinalen Impulsen beruht, führt für diesen Teil des Matrixelements (2.89) auf die Darstellung

$$\begin{aligned} \langle \Phi | H_C | \Psi \rangle \equiv & \frac{g^2}{2} \int d^3x \int d^3x' \int d^3x'' \mathcal{N} \int_{\Lambda} \mathcal{D}A^{\perp} \Phi[A^{\perp}]^* \rho^b(\mathbf{x}') \mathcal{J}[A^{\perp}] \\ & \left( \partial_i^x \langle \mathbf{x}a | (-\partial_i \hat{D}_i(A^{\perp}))^{-1} | \mathbf{x}'b \rangle \right) \left( \partial_i^x \langle \mathbf{x}a | (-\partial_j \hat{D}_j(A^{\perp}))^{-1} | \mathbf{x}''c \rangle \right) \rho^c(\mathbf{x}'') \Psi[A^{\perp}]. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Für die weitere Umformung benutzen wir die Symmetrie (2.75) des Faddeev-Popov-Propagators für transversale Eichfelder und erhalten mit der Umformung

$$\begin{aligned} & \int d^3x \left( \partial_i^x \langle \mathbf{x}a | (-\partial_i \hat{D}_i(A^{\perp}))^{-1} | \mathbf{x}'b \rangle \right) \left( \partial_i^x \langle \mathbf{x}a | (-\partial_j \hat{D}_j(A^{\perp}))^{-1} | \mathbf{x}''c \rangle \right) \rho^c(\mathbf{x}'') \\ & = \langle \mathbf{x}'b | (-\partial_i \hat{D}_i(A^{\perp}))^{-1} (-\Delta) (-\partial_j \hat{D}_j(A^{\perp}))^{-1} | \mathbf{x}''c \rangle \end{aligned} \quad (2.93)$$

für das Matrixelement (2.92) der longitudinalen Impulse den Ausdruck

$$\begin{aligned} \langle \Phi | H_C | \Psi \rangle = & \frac{g^2}{2} \int d^3x \int d^3x' \mathcal{N} \int_{\Lambda} \mathcal{D}A^{\perp} \mathcal{J}[A^{\perp}] \\ & \Phi[A^{\perp}]^* \mathcal{J}[A^{\perp}]^{-1} \rho^a(\mathbf{x}) F^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', A^{\perp}) \mathcal{J}[A^{\perp}] \rho^b(\mathbf{x}') \Psi[A^{\perp}]. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Dabei definiert

$$F^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', A^{\perp}) = \langle \mathbf{x}a | (-\partial_i \hat{D}_i(A^{\perp}))^{-1} (-\Delta) (-\partial_j \hat{D}_j(A^{\perp}))^{-1} | \mathbf{x}'b \rangle \quad (2.95)$$

den nicht-abelschen Coulombpropagator. Basierend auf der Darstellung (2.94) repräsentiert damit der sogenannte Coulombterm

$$H_C = \frac{g^2}{2} \int d^3x \int d^3x' \mathcal{J}[A^\perp]^{-1} \rho^a(\mathbf{x}) F^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', A^\perp) \mathcal{J}[A^\perp] \rho^b(\mathbf{x}') \quad (2.96)$$

den Teil des Hamiltonoperators in Coulombbeichung, welcher durch die mit Hilfe des Gaußschen Gesetzes (2.71) aufgelösten, longitudinalen Impulse erzeugt wird.

Zusammenfassend erhalten wir damit für den Hamiltonoperator in der Coulombbeichung die Darstellung

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x \left( \mathcal{J}[A^\perp]^{-1} \Pi_i^{\perp a}(\mathbf{x}) \mathcal{J}[A^\perp] \Pi_i^{\perp a}(\mathbf{x}) + B_i^a(\mathbf{x}) B_i^a(\mathbf{x}) \right) + \frac{g^2}{2} \int d^3x \int d^3x' \mathcal{J}[A^\perp]^{-1} \rho^a(\mathbf{x}) F^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', A^\perp) \mathcal{J}[A^\perp] \rho^b(\mathbf{x}'). \quad (2.97)$$

Im Vergleich zur Weyleichung ist der hier vorliegende Hamiltonoperator in der Coulombbeichung deutlich komplizierter und enthält insbesondere mit der Faddeev-Popov-Determinante  $\mathcal{J}[A^\perp]$  ein äußerst komplexes Funktional des Eichfeldes, welches die Krümmung des physikalischen Konfigurationsraumes  $\Lambda$  repräsentiert. Allerdings ist das Gaußsche Gesetz (2.71) in dieser Formulierung bereits gelöst, und daher muß an die Wellenfunktionale  $\Psi[A^\perp]$  in der Coulombbeichung, bis auf die Normierbarkeit, keine Zwangsbedingung mehr gestellt werden. Dies ist der zentrale Vorteil dieser Formulierung.

Eine sehr interessante Größe, welche wir im Rahmen der vorliegenden Arbeit noch detailliert untersuchen werden, ist durch den Erwartungswert des nicht-abelschen Coulombpropagators (2.95)

$$V^{ab}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \left\langle F^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', A^\perp) \right\rangle_{\Psi_0} \quad (2.98)$$

bezüglich des Vakuumzustandes  $\Psi_0$  der Yang-Mills-Theorie definiert. Da der Coulombpropagator  $F$  im Hamiltonoperator (2.97) zwei Farbladungen  $\rho^a(\mathbf{x})$  und  $\rho^b(\mathbf{x}')$  an den unterschiedlichen Positionen  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{x}'$  miteinander verknüpft, kann der Erwartungswert (2.98) als Potential zwischen den beiden Farbladungen interpretiert werden. Dieses nicht-abelsche Coulombpotential  $V$  stimmt allerdings nicht exakt mit dem statischen Potential  $V_q$  eines Quark-Antiquark-Paares überein, welches aus dem Erwartungswert einer Wilsonschleife resultiert. Vielmehr gilt zwischen diesen beiden Potentialen die Ungleichung [38]

$$V_q(r) \leq V(r). \quad (2.99)$$

Wenn also das mit einer Wilsonschleife berechnete Potential  $V_q$  die Eigenschaft des Farberchlusses aufweist, dann muß dies auch für das nicht-abelsche Coulombpotential (2.98) der Fall sein.

## 2.6 Eichfixierung und Auflösung des Gaußschen Gesetzes durch explizite Elimination der unphysikalischen Freiheitsgrade

Eine alternative Methode, die Eichung zu fixieren und das Gaußsche Gesetz aufzulösen, besteht in der expliziten Elimination der unphysikalischen Freiheitsgrade, welche in der Weyleichung aufgrund der Eichinvarianz bezüglich zeitunabhängiger Eichtransformationen verbleiben. Im vorliegenden Abschnitt diskutieren wir diesen eher technischen Zugang, da er

durch die explizite Transformation in die Coulombkoordinaten einen guten Einblick in die Krümmung des Konfigurationsraumes ermöglicht. Diese Art der Eichfixierung, ursprünglich von Christ und Lee [18] durchgeführt, beinhaltet die nichtlineare Transformation der kartesischen Feldkoordinaten  $A(\mathbf{x})$  der Weyleichung ( $A_0 = 0$ )

$$A(\mathbf{x}) \xrightarrow{U^\dagger(\mathbf{x})=\exp(-it^a\phi^a(\mathbf{x}))} (C(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x})) \quad (2.100)$$

in die gekrümmten Feldkoordinaten  $(C(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x}))$  der Coulombeichung ( $\partial_i C_i = 0$ ).<sup>14</sup> Der Zusammenhang beider Koordinatensätze

$$A_i(C, \phi) = U(\phi)C_iU^{-1}(\phi) + \frac{i}{g}U(\phi)(\partial_iU^{-1}(\phi)) \quad (2.101)$$

basiert auf derjenigen Eichtransformation

$$U(\mathbf{x}) = \exp(it^a\phi^a(\mathbf{x})), \quad (2.102)$$

welche den Übergang von der Coulombeichung in die Weyleichung beschreibt und deren Winkel  $\phi(\mathbf{x})$  damit die unphysikalischen Freiheitsgrade darstellen. Wenn dabei das transversale Eichfeld innerhalb der FMR liegt, also  $C \in \Lambda$  gilt, dann ist die Eichtransformation  $U(\mathbf{x})$  in (2.101) eindeutig bestimmt. Bezüglich dieses Koordinatenwechsels (2.101) betrachten wir im folgenden die Transformation sowohl des Hamiltonoperators (2.48) als auch des Gaußschen Gesetzes (2.35) in die neuen Feldkoordinaten  $(C, \phi)$ .

Da die weiteren Ableitungen in diesem Abschnitt neben der Coulombeichung auch auf andere Eichungen anwendbar sind, gehen wir hier allgemein von einer linearen Eichbedingung der Form

$$\int d^3x' \langle \mathbf{x}a | \Gamma_i | \mathbf{x}'b \rangle C_i^b(\mathbf{x}') = 0 \quad (2.103)$$

aus.<sup>15</sup> Dabei soll der Operator  $\Gamma_i$  im Funktionenraum  $\mathcal{F} = \{|\mathbf{x}a\rangle\}$  reelle Matrixelemente besitzen, aber ansonsten beliebig sein. In diesem Zusammenhang führt die Wahl  $\Gamma_i = \partial_i$  auf die hier diskutierte Coulombeichung  $\partial_i C_i = 0$ .<sup>16</sup>

### 2.6.1 Hamiltonoperator

Wir betrachten zunächst die Transformation des Hamiltonoperators (2.48) unter der Koordinatentransformation (2.101). Da die potentielle Energie (2.84) keine Impulsoperatoren enthält und eichinvariant ist, geht  $H_P[A]$  unter (2.101) einfach in die Form  $H_P[C]$  über und beinhaltet damit keine redundanten Freiheitsgrade  $\phi$ . Im Gegensatz dazu ist die Behandlung des kinetischen Terms von (2.48)

$$H_T = \frac{1}{2} \int d^3x \frac{\delta}{i\delta A_i^a(\mathbf{x})} \frac{\delta}{i\delta A_i^a(\mathbf{x})} \quad (2.104)$$

<sup>14</sup>Zur besseren Unterscheidung bezeichnen wir im vorliegenden Abschnitt 2.6 grundsätzlich die Feldkoordinaten in der Weyleichung ( $A_0 = 0$ ) mit  $A$  und die Koordinaten der Coulombeichung ( $\partial_i C_i = 0$ ) mit  $C$ .

<sup>15</sup>Im Fall einer anderen Eichbedingung als der Coulombeichung bezeichnet die Eichtransformation  $U(\mathbf{x})$  in (2.101) diejenige Eichtransformation, welche den Übergang von dieser Eichung (2.103) in die Weyleichung beschreibt.

<sup>16</sup>Im Fall der Coulombeichung  $\Gamma_i = \partial_i$  sind die Matrixelemente in (2.103) durch  $\langle \mathbf{x}a | \partial_i | \mathbf{x}'b \rangle = \delta^{ab} \partial_i^x \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  gegeben.

deutlich komplexer. Aufgrund der Struktur des kinetischen Terms können die Feldkoordinaten  $A$  der Weyleichung als kartesische Koordinaten identifiziert werden.

Bei einem Übergang von kartesischen Koordinaten  $q_1, \dots, q_N$  in gekrümmte Koordinaten  $Q_1(q), \dots, Q_N(q)$  ändert sich die Form des Laplace-Beltrami-Operators [39] in der folgenden Weise

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial q_i} = \sum_{i,j=1}^N M^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial Q_i} M_{ij}^{-1} M^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial Q_j}. \quad (2.105)$$

Dabei stellt

$$M_{ij} = \frac{\partial q_n}{\partial Q_i} \frac{\partial q_n}{\partial Q_j} \quad (2.106)$$

die Metrik des gekrümmten Raumes und

$$M = \det(M_{ij}) = \left[ \det \left( \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \right) \right]^2 \quad (2.107)$$

die Determinante der Metrik  $M_{ij}$  dar. Die inverse Metrik  $M_{ij}^{-1}$  ist durch

$$M_{ij}^{-1} = \frac{\partial Q_i}{\partial q_n} \frac{\partial Q_j}{\partial q_n} \quad (2.108)$$

gegeben. Da die Koordinatentransformation (2.101) von  $A$  in  $(C, \phi)$  nichtlinear ist, sind  $(C, \phi)$  gekrümmte Koordinaten, und der kinetische Term (2.104) nimmt daher entsprechend zu (2.105) in den neuen Koordinaten  $(C, \phi)$  die Form eines gekrümmten Laplace-Beltrami-Operators an

$$\begin{aligned} H_T = \frac{1}{2} M^{-\frac{1}{2}} \int d^3x \int d^3x' \left[ p_a(\mathbf{x}) M^{\frac{1}{2}} M^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')_{ab} p_b(\mathbf{x}') + p_a(\mathbf{x}) M^{\frac{1}{2}} M^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')_{ai}^b P_i^b(\mathbf{x}') \right. \\ \left. + P_i^a(\mathbf{x}) M^{\frac{1}{2}} M^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')_{ib}^a p_b(\mathbf{x}') + P_i^a(\mathbf{x}) M^{\frac{1}{2}} M^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')_{ij}^{ab} P_j^b(\mathbf{x}') \right]. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Dabei ist die inverse Metrik  $M^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  in die vier Blöcke aufgeteilt

$$M^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \begin{bmatrix} M^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')_{ab} & M^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')_{ai}^b \\ M^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')_{ib}^a & M^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')_{ij}^{ab} \end{bmatrix},$$

welche im einzelnen durch die Integrale

$$M^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')_{ab} = \int d^3y \frac{\delta \phi^a(\mathbf{x})}{\delta A_i^c(\mathbf{y})} \frac{\delta \phi^b(\mathbf{x}')}{\delta A_i^c(\mathbf{y})} \quad (2.110)$$

$$M^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')_{bi}^a = M^{-1}(\mathbf{x}', \mathbf{x})_{ib}^a = \int d^3y \frac{\delta \phi^b(\mathbf{x})}{\delta A_j^c(\mathbf{y})} \frac{\delta C_i^a(\mathbf{x}')}{\delta A_j^c(\mathbf{y})} \quad (2.111)$$

$$M^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')_{ij}^{ab} = \int d^3y \frac{\delta C_i^a(\mathbf{x})}{\delta A_n^c(\mathbf{y})} \frac{\delta C_j^b(\mathbf{x}')}{\delta A_n^c(\mathbf{y})} \quad (2.112)$$

bestimmt sind. Die Feldoperatoren  $p_a(\mathbf{x})$  und  $P_i^a(\mathbf{x})$  bezeichnen die zu den Koordinaten  $\phi^a(\mathbf{x})$  und  $C_i^a(\mathbf{x})$  kanonisch konjugierten Impulse. Während der Impulsoperator  $p_a$  der redundanten Freiheitsgrade einfach durch

$$p_a(\mathbf{x}) = \frac{\delta}{i\delta\phi^a(\mathbf{x})} \quad (2.113)$$

definiert ist, benötigt die Konstruktion der kanonischen Impulse  $P_i^a(\mathbf{x})$  aufgrund der Zwangsbedingung (2.103) eine detaillierte Betrachtung. Zu diesem Zweck benutzen wir einen vollständigen Satz von reellen orthogonalen Funktionen  $f_i^a(\mathbf{x})_N$ , welche die Zwangsbedingung

$$\int d^3x' \langle \mathbf{x}a | \Gamma_i | \mathbf{x}'b \rangle f_i^b(\mathbf{x}')_N = 0 \quad (2.114)$$

für alle  $(\mathbf{x}, a)$  erfüllen. Für die konkrete Konstruktion dieser Ansatzfunktionen  $f_i^a(\mathbf{x})_N$  betrachten wir die Abbildung

$$\Gamma_i : \{|\mathbf{x}a\rangle\} \longrightarrow \{|i\mathbf{x}a\rangle\}; |\xi\rangle \longrightarrow |\bar{\xi}\rangle \equiv \int d^3x |i\mathbf{x}a\rangle \langle \mathbf{x}a | \Gamma_i^\dagger | \xi \rangle \quad (2.115)$$

eines Zustandes  $|\xi\rangle$  aus dem Funktionenraum  $\mathcal{F} = \{|\mathbf{x}a\rangle\}$  in den größeren Funktionenraum  $\bar{\mathcal{F}} = \{|i\mathbf{x}a\rangle\}$ , wobei  $i$  einen Lorentzindex,  $\mathbf{x}$  einen Raumpunkt und  $a$  einen Farbindex darstellt. Ein Zustand  $|N\rangle \in \bar{\mathcal{F}}$ , der orthogonal zu allen Zuständen  $|\bar{\xi}\rangle$  ist, also

$$\langle N | \bar{\xi} \rangle = \int d^3x \langle N | i\mathbf{x}a \rangle \langle \mathbf{x}a | \Gamma_i^\dagger | \xi \rangle = 0 \quad \forall |\xi\rangle \in \mathcal{F} \quad (2.116)$$

erfüllt, stellt eine Ansatzfunktion

$$f_i^a(\mathbf{x})_N = \langle i\mathbf{x}a | N \rangle \quad (2.117)$$

dar, da diese Funktion für jeden Zustand  $|\xi\rangle = |\mathbf{x}a\rangle \in \mathcal{F}$

$$0 = \langle \bar{\xi} | N \rangle = \int d^3x' \langle \bar{\xi} | i\mathbf{x}'b \rangle \langle i\mathbf{x}'b | N \rangle = \int d^3x' \langle \mathbf{x}a | \Gamma_i | \mathbf{x}'b \rangle f_i^b(\mathbf{x}')_N \quad (2.118)$$

garantiert und daher die Zwangsbedingung (2.114) erfüllt. Unter Verwendung eines orthornormalen Funktionensatzes, bestehend aus diesen Ansatzfunktionen  $f_i^a(\mathbf{x})_N$ , kann das transversale Eichfeld durch

$$C_i^a(\mathbf{x}) = \sum_N f_i^a(\mathbf{x})_N Q_N \quad (2.119)$$

dargestellt werden, wobei jetzt  $Q_N$  unabhängige, generalisierte Koordinaten sind. Dementsprechend ergibt sich der zu  $C_i^a(\mathbf{x})$  kanonisch konjugierte Impuls durch

$$P_i^a(\mathbf{x}) = \sum_N f_i^a(\mathbf{x})_N \frac{\partial}{i\partial Q_N}. \quad (2.120)$$

Sowohl das Eichfeld  $C$  in der Darstellung (2.119) als auch der korrespondierende Impulsoperator (2.120) erfüllen die Eichbedingung (2.103)

$$\int d^3x' \langle \mathbf{x}a | \Gamma_i | \mathbf{x}'b \rangle C_i^b(\mathbf{x}') = \int d^3x' \langle \mathbf{x}a | \Gamma_i | \mathbf{x}'b \rangle P_i^b(\mathbf{x}') = 0. \quad (2.121)$$

Für die Bestimmung der im kinetischen Term (2.109) enthaltenen inversen Matrix  $M^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  berechnen wir im folgenden die Funktionalableitungen  $\frac{\delta\phi}{\delta A}$  und  $\frac{\delta C}{\delta A}$ . Dazu benutzen wir die zu (2.101) inverse Eichtransformation

$$C_i = U^{-1}(\phi)A_iU(\phi) + \frac{i}{g}U^{-1}(\phi)(\partial_iU(\phi)) \quad (2.122)$$

und betrachten kleine Variationen der Koordinaten  $C, \phi$  und  $A$

$$\begin{aligned} \delta C_i^a t^a &= (\delta U^{-1})A_i^a t^a U + U^{-1}(\delta A_i^a)t^a U + U^{-1}A_i^a t^a (\delta U) \\ &\quad + \frac{i}{g}(\delta U^{-1})(\partial_i U) + \frac{i}{g}U^{-1}(\partial_i \delta U). \end{aligned} \quad (2.123)$$

Die Multiplikation dieser Gleichung mit dem Generator  $t^b$  und die anschließende Spurbildung bezüglich des Farbraumes führt dann auf

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\delta C_i^b &= \text{tr} \left( (\delta U^{-1})A_i U t^b \right) + (\delta A_i^a)\text{tr} \left( (\delta U^{-1})t^a U t^b \right) + \text{tr} \left( U^{-1}A_i(\delta U)t^b \right) \\ &\quad + \frac{i}{g} \left[ \text{tr} \left( (\delta U^{-1})(\partial_i U)t^b \right) + \text{tr} \left( U^{-1}(\partial_i \delta U)t^b \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.124)$$

Für die weitere Umformung dieses Ausdrucks benutzen wir die Gruppenrelation

$$U^{-1}t^a U = \hat{U}^{ab}t^b, \quad (2.125)$$

wobei  $\hat{U}^{ab}$  eine reelle und orthogonale Matrix darstellt und damit insbesondere unitär ist. Da der Term  $iU^{-1}\frac{\partial U}{\partial\phi}$  ein Element der Lie-Algebra ist<sup>17</sup>, lassen sich mit

$$iU^{-1}\frac{\partial U}{\partial\phi^a} \equiv t^b \lambda_a^b \quad (2.126)$$

die Funktionen  $\lambda$  definieren, welche insbesondere Funktionale der redundanten Freiheitsgrade  $\phi$  sind. Unter Verwendung dieser beiden Relationen (2.125) und (2.126) ergibt sich nach einer kleinen Umformung für die Relation (2.124)

$$\delta C_i^a = \hat{U}^{ba}\delta A_i^b + \frac{i}{g}\hat{D}_i^{ab}(\lambda_c^b \delta\phi^c). \quad (2.127)$$

Dabei bezeichnet  $\hat{D}_i^{ab}$  die kovariante Ableitung in der adjungierten Darstellung

$$\hat{D}_i^{ab}(C) = \delta^{ab}\partial_i + g(\hat{T}^c)^{ab}C_i^c \quad (2.128)$$

---

<sup>17</sup>Diese Aussage läßt sich unter Anwendung der Relation

$$\frac{d}{dt}e^{A(t)} = \int_0^1 ds e^{sA} \frac{dA}{dt} e^{(1-s)A}$$

auf  $iU^{-1}\frac{\partial U}{\partial\phi}$  beweisen. Dies führt auf die Darstellung

$$iU^{-1}\frac{\partial U}{\partial\phi} = - \int_0^1 ds \underbrace{e^{-i(1-s)t^b\phi^b} t^a e^{i(1-s)t^c\phi^c}}_{\alpha^a(s)}.$$

Für den Integrand  $\alpha^a(s)$  folgt  $e^{i\alpha^a(s)} = U^\dagger(1-s)e^{it^a}U(1-s)$ , und somit liegt das Objekt  $e^{i\alpha^a(s)}$  innerhalb der Lie-Gruppe. Damit ist insbesondere  $\alpha^a(s)$  und dementsprechend auch  $iU^{-1}\frac{\partial U}{\partial\phi}$  ein Element der Lie-Algebra.

bezüglich des transversalen Eichfeldes  $C$ . Die Relation (2.127) beschreibt die Veränderung von  $C$  bei einer Variation der beiden Felder  $A$  und  $\phi$ . Wenn wir von einer kleinen, jedoch beliebigen Variation  $\delta A$  des Eichfeldes in der Weyleichung ausgehen, dann kann die Variation der redundanten Freiheitsgrade  $\delta\phi$  nicht mehr beliebig sein (vgl. (2.100)), da  $U^{-1}(\phi)$  diejenige Eichtransformation ist, welche die Eichbedingung (2.103) für  $C$  gewährleistet. Also muß insbesondere  $U^{-1}(\phi + \delta\phi)$  die Realisierung der Eichbedingung (2.103) für das variierte Eichfeld  $C + \delta C$  garantieren und da diese Eichbedingung linear ist, erfüllt auch die Variation  $\delta C$  die Eichbedingung (2.103)

$$\int d^3 x' \langle \mathbf{x}a | \Gamma_i | \mathbf{x}'b \rangle \delta C_i^b(\mathbf{x}') = 0. \quad (2.129)$$

Mit Verwendung von (2.127) erhalten wir die Darstellung

$$\int d^3 x' \langle \mathbf{x}a | \Gamma_i | \mathbf{x}'b \rangle \left[ \hat{U}^{cb}(\mathbf{x}') \delta A_i^c(\mathbf{x}') + \frac{i}{g} \hat{D}_i^{bc}(\mathbf{x}') (\lambda(\mathbf{x}')_d^c \delta\phi^d(\mathbf{x}') \right] = 0, \quad (2.130)$$

welche formal nach  $\delta\phi$  aufgelöst werden kann

$$\delta\phi^a(\mathbf{x}) = -g\lambda^{-1}(\mathbf{x})_a^b \int d^3 x' \langle \mathbf{x}b | (\Gamma_j \hat{D}_j)^{-1} \Gamma_i | \mathbf{x}'c \rangle \hat{U}^{dc}(\mathbf{x}') \delta A_i^d(\mathbf{x}') \quad (2.131)$$

und damit die Funktionalableitung

$$\frac{\delta\phi^a(\mathbf{x})}{\delta A_i^b(\mathbf{x}')} = -g\lambda^{-1}(\mathbf{x})_a^c \langle \mathbf{x}c | (\Gamma_j \hat{D}_j)^{-1} \Gamma_i | \mathbf{x}'d \rangle \hat{U}^{bd}(\mathbf{x}') \quad (2.132)$$

bestimmt. In dieser Gleichung bezeichnet  $(\Gamma_j \hat{D}_j)^{-1}$  die inverse Matrix von  $\Gamma_j \hat{D}_j$ , deren Matrixelemente im Farb- und Lorentzraum durch

$$\langle \mathbf{x}a | \Gamma_j \hat{D}_j | \mathbf{x}'b \rangle = \int d^3 x'' \langle \mathbf{x}a | \Gamma_j | \mathbf{x}''c \rangle \langle \mathbf{x}''c | \hat{D}_j | \mathbf{x}'b \rangle \quad (2.133)$$

mit der antisymmetrischen Matrix  $\hat{D}_j$

$$\langle \mathbf{x}a | \hat{D}_j | \mathbf{x}'b \rangle = \hat{D}_j^{ab}(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (2.134)$$

gegeben sind. Das Einsetzen der Relation (2.131) in die Beziehung (2.127) führt auf den Zusammenhang

$$\delta C_i^a(\mathbf{x}) = \int d^3 x' \left[ \hat{U}^{ba}(\mathbf{x}') \delta_{ij} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - \langle \mathbf{x}a | \hat{D}_i (\Gamma_k \hat{D}_k)^{-1} \Gamma_j | \mathbf{x}'c \rangle \hat{U}^{bc}(\mathbf{x}') \right] \delta A_j^b(\mathbf{x}') \quad (2.135)$$

und ergibt damit für die Funktionalableitung von  $C$  nach  $A$

$$\frac{\delta C_i^a(\mathbf{x})}{\delta A_j^b(\mathbf{x}')} = \hat{U}^{ba}(\mathbf{x}) \delta_{ij} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - \langle \mathbf{x}a | \hat{D}_i (\Gamma_k \hat{D}_k)^{-1} \Gamma_j | \mathbf{x}'c \rangle \hat{U}^{bc}(\mathbf{x}'). \quad (2.136)$$

Diese erfüllt insbesondere die Eichbedingung (2.103)

$$\int d^3 x \langle \mathbf{x}''c | \Gamma_i | \mathbf{x}a \rangle \frac{\delta C_i^a(\mathbf{x})}{\delta A_j^b(\mathbf{x}')} = 0. \quad (2.137)$$

Mit den Funktionalableitungen (2.132) und (2.136) sind wir in der Lage, die im kinetischen Operator (2.109) enthaltene inverse Metrik (2.110) – (2.112) zu bestimmen, und erhalten nach einer kurzen Umformung

$$M^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')_{ab} = g^2 \lambda^{-1}(\mathbf{x})_a^c \lambda^{-1}(\mathbf{x}')_b^d \langle \mathbf{x}c | (\Gamma_i \hat{D}_i)^{-1} (\Gamma_k \Gamma_k^\dagger) (\hat{D}_j^\dagger \Gamma_j^\dagger)^{-1} | \mathbf{x}'d \rangle \quad (2.138)$$

$$M^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')_{bi}^a = -g \lambda^{-1}(\mathbf{x})_b^c \langle \mathbf{x}c | (\Gamma_j \hat{D}_j)^{-1} \Gamma_i | \mathbf{x}'a \rangle + g \lambda^{-1}(\mathbf{x})_b^c \langle \mathbf{x}c | (\Gamma_j \hat{D}_j)^{-1} (\Gamma_k \Gamma_k^\dagger) (\hat{D}_n^\dagger \Gamma_n^\dagger)^{-1} \hat{D}_i^\dagger | \mathbf{x}'a \rangle \quad (2.139)$$

$$M^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')_{ij}^{ab} = \delta^{ab} \delta_{ij} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - \langle \mathbf{x}'b | \hat{D}_j (\Gamma_n \hat{D}_n)^{-1} \Gamma_i | \mathbf{x}a \rangle - \langle \mathbf{x}a | \hat{D}_i (\Gamma_n \hat{D}_n)^{-1} \Gamma_j | \mathbf{x}'b \rangle + \langle \mathbf{x}a | \hat{D}_i (\Gamma_n \hat{D}_n)^{-1} (\Gamma_k \Gamma_k^\dagger) (\hat{D}_m^\dagger \Gamma_m^\dagger)^{-1} \hat{D}_j^\dagger | \mathbf{x}'a \rangle. \quad (2.140)$$

Zur Berechnung der Determinante  $M$  (2.107), benutzen wir für die Variation des eichfixierten Feldes  $C$  basierend auf (2.119)

$$\delta C_i^a(\mathbf{x}) = \sum_N f_i^a(\mathbf{x})_N \delta Q_N \quad (2.141)$$

und verwenden eine entsprechende Konstruktion für die Variation des Eichfeldes  $A$  der Weyl-eichung in der Form

$$\delta A_i^a(\mathbf{x}) = \hat{U}^{ab}(\mathbf{x}) \left[ \delta A_i^b(\mathbf{x})_I + \delta A_i^b(\mathbf{x})_{II} \right], \quad (2.142)$$

mit

$$\delta A_i^a(\mathbf{x})_I \equiv \sum_\xi \langle \mathbf{x}a | \Gamma_i^\dagger (\Gamma_j \Gamma_j^\dagger)^{-\frac{1}{2}} | \xi \rangle \delta q_\xi \quad (2.143)$$

$$\delta A_i^a(\mathbf{x})_{II} \equiv \sum_N f_i^a(\mathbf{x})_N \delta q_N. \quad (2.144)$$

Die Summe in (2.143) läuft über einen vollständigen, orthogonalen Satz von Basisvektoren im Funktionalraum  $\mathcal{F} = \{|\mathbf{x}a\rangle\}$ . In dieser Zerlegung repräsentiert  $\delta A_I$  denjenigen Anteil von  $\delta A$ , der im Unterraum von  $\bar{\mathcal{F}} = \{|i\mathbf{x}a\rangle\}$  liegt, welcher durch die Abbildung (2.115) aufgebaut wird. Dementsprechend beinhaltet  $\delta A_{II}$  die Komponente von  $\delta A$ , welche im dazu komplementären Raum liegt und wegen (2.116) orthogonal auf  $\delta A_I$  steht.

Insgesamt betrachten wir damit folgende Koordinatentransformation

$$(q_\xi, q_N) \xrightarrow{\alpha} A(\mathbf{x}) \xrightarrow{U^\dagger(\mathbf{x})} (C(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x})) \xrightarrow{\beta} (Q_N, \phi(\mathbf{x})), \quad (2.145)$$

wobei die Abbildungen  $\alpha$  und  $\beta$  durch (2.142) und (2.141) definiert sind. Bezüglich dieser Transformationen  $\alpha$  und  $\beta$  gelten unter Verwendung von (2.116) und der Tatsache, daß die

Ansatzfunktionen  $f_i^a(\mathbf{x})_N$  reell sind, die folgenden Orthogonalitätsrelationen

$$\begin{aligned} \int d^3x f_i^a(\mathbf{x})_N f_i^a(\mathbf{x})_{N'} &= \int d^3x \langle i\mathbf{x}a|N \rangle \langle i\mathbf{x}a|N' \rangle = \int d^3x \langle N|i\mathbf{x}a \rangle \langle i\mathbf{x}a|N' \rangle \\ &= \langle N|N' \rangle = \delta_{NN'} \end{aligned} \quad (2.146)$$

$$\begin{aligned} \int d^3x f_i^a(\mathbf{x})_N g_i^a(\mathbf{x})_\xi &= \int d^3x \langle i\mathbf{x}a|N \rangle \langle \mathbf{x}a|\Gamma_i^\dagger(\Gamma_j\Gamma_j^\dagger)^{-\frac{1}{2}}|\xi \rangle \\ &= \sum_{\xi'} \int d^3x \langle i\mathbf{x}a|N \rangle \langle \mathbf{x}a|\Gamma_i^\dagger|\xi' \rangle \langle \xi'|(\Gamma_j\Gamma_j^\dagger)^{-\frac{1}{2}}|\xi \rangle \\ &= \sum_{\xi'} \int d^3x \langle i\mathbf{x}a|N \rangle \langle i\mathbf{x}a|\bar{\xi}' \rangle \langle \xi'|(\Gamma_j\Gamma_j^\dagger)^{-\frac{1}{2}}|\xi \rangle \\ &= \sum_{\xi'} \langle N|\bar{\xi}' \rangle \langle \xi'|(\Gamma_j\Gamma_j^\dagger)^{-\frac{1}{2}}|\xi \rangle = 0 \end{aligned} \quad (2.147)$$

$$\begin{aligned} \int d^3x g_i^a(\mathbf{x})_\xi g_i^a(\mathbf{x})_{\xi'} &= \int d^3x \langle \mathbf{x}a|\Gamma_i^\dagger(\Gamma_j\Gamma_j^\dagger)^{-\frac{1}{2}}|\xi \rangle \langle \mathbf{x}a|\Gamma_i^\dagger(\Gamma_k\Gamma_k^\dagger)^{-\frac{1}{2}}|\xi' \rangle \\ &= \int d^3x \langle \xi|((\Gamma_j\Gamma_j^\dagger)^{-\frac{1}{2}})^\dagger \Gamma_i|\mathbf{x}a \rangle \langle \mathbf{x}a|\Gamma_i^\dagger(\Gamma_k\Gamma_k^\dagger)^{-\frac{1}{2}}|\xi' \rangle \\ &= \langle \xi|(\Gamma_j\Gamma_j^\dagger)^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_i\Gamma_i^\dagger)(\Gamma_k\Gamma_k^\dagger)^{-\frac{1}{2}}|\xi' \rangle \\ &= \langle \xi|\xi' \rangle = \delta_{\xi\xi'} \end{aligned} \quad (2.148)$$

mit den reellen Funktionen<sup>18</sup>

$$g_i^a(\mathbf{x})_\xi \equiv \langle \mathbf{x}a|\Gamma_i^\dagger(\Gamma_j\Gamma_j^\dagger)^{-\frac{1}{2}}|\xi \rangle. \quad (2.149)$$

Aufgrund dieser Zusammenhänge sind beide Abbildungen  $\alpha$  und  $\beta$  orthogonale Transformationen, und damit besitzt wegen  $\det(\alpha) = \det(\beta) = 1$  die Determinante der Metrik (2.107) die Darstellung

$$M^{-\frac{1}{2}} = \left| \det \left( \frac{\delta(C, \phi)}{\delta(A)} \right) \right| = \left| \det \left( \frac{\delta(Q_N, \phi)}{\delta(q_\xi, q_N)} \right) \right|. \quad (2.150)$$

Unter Verwendung der Relationen (2.132), (2.136), (2.143), (2.144) und der Orthogonalitätsrelationen (2.146) – (2.148) folgt für die einzelnen Blöcke der Determinanten (2.150)

$$\frac{\delta\phi^a(\mathbf{x})}{\delta q_\xi} = \int d^3x' \frac{\delta\phi^a(\mathbf{x})}{\delta A_i^b(\mathbf{x}')} \frac{\delta A_i^b(\mathbf{x}')}{\delta q_\xi} = \langle \mathbf{x}a| -g\lambda^{-1}(\Gamma_i\hat{D}_i)^{-1}(\Gamma_j\Gamma_j^\dagger)^{\frac{1}{2}}|\xi \rangle \quad (2.151)$$

$$\frac{\delta\phi^a(\mathbf{x})}{\delta q_N} = \int d^3x' \frac{\delta\phi^a(\mathbf{x})}{\delta A_i^b(\mathbf{x}')} \frac{\delta A_i^b(\mathbf{x}')}{\delta q_N} = 0 \quad (2.152)$$

<sup>18</sup>Die Funktionen  $g$  sind reell, da die Matrixelemente des Operators  $\Gamma_i$  im Funktionenraum  $\mathcal{F} = \{|\mathbf{x}a\rangle\}$  reell sind.

und

$$\begin{aligned} \frac{\delta Q_N}{\delta q_\xi} &= \int d^3x f_i^a(\mathbf{x})_N \frac{\delta C_i^a(\mathbf{x})}{\delta q_\xi} = \int d^3x \int d^3x' f_i^a(\mathbf{x})_N \frac{\delta C_i^a(\mathbf{x})}{\delta A_j^b(\mathbf{x}')} \frac{\delta A_j^b(\mathbf{x}')}{\delta q_\xi} \\ &= - \int d^3x f_i^a(\mathbf{x})_N \langle \mathbf{x}a | \hat{D}_i (\Gamma_j \hat{D}_j)^{-1} (\Gamma_n \Gamma_n^\dagger)^{\frac{1}{2}} | \xi \rangle \end{aligned} \quad (2.153)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta Q_N}{\delta q_{N'}} &= \int d^3x f_i^a(\mathbf{x})_N \frac{\delta C_i^a(\mathbf{x})}{\delta q_{N'}} = \int d^3x \int d^3x' f_i^a(\mathbf{x})_N \frac{\delta C_i^a(\mathbf{x})}{\delta A_j^b(\mathbf{x}')} \frac{\delta A_j^b(\mathbf{x}')}{\delta q_{N'}} \\ &= \delta_{NN'}. \end{aligned} \quad (2.154)$$

Demzufolge besitzt  $M^{-\frac{1}{2}}$  die folgende Struktur

$$M^{-\frac{1}{2}} = \left| \det \begin{bmatrix} -g\lambda^{-1} (\Gamma_i \hat{D}_i)^{-1} (\Gamma_j \Gamma_j^\dagger)^{\frac{1}{2}} & 0 \\ \frac{\delta Q_N}{\delta q_\xi} & \end{bmatrix} \right| = \left| \det \left( -g\lambda^{-1} (\Gamma_i \hat{D}_i)^{-1} (\Gamma_j \Gamma_j^\dagger)^{\frac{1}{2}} \right) \right|, \quad (2.155)$$

und damit beschränkt sich die Determinantenbildung auf den Funktionenraum  $\mathcal{F} = \{|\mathbf{x}a\rangle\}$ . Für die Transformationsdeterminante  $M^{\frac{1}{2}}$  erhalten wir daraus die Darstellung

$$M^{\frac{1}{2}} = \left| \det \left( \frac{1}{g} (\Gamma_j \Gamma_j^\dagger)^{-\frac{1}{2}} \right) \mathcal{J}[C] \det(\lambda)_{[\phi]} \right| \quad (2.156)$$

mit

$$\mathcal{J}[C] = \det \left( -\Gamma_i \hat{D}_i(C) \right). \quad (2.157)$$

Während die erste Determinante auf der rechten Seite von (2.156) eine triviale Konstante (unabhängig von den Koordinaten  $C$  und  $\phi$ ) ist, repräsentiert  $\mathcal{J}[C]$  als Funktional von  $C$  die Faddeev-Popov-Determinante und  $\det(\lambda)_{[\phi]}$  ein weiteres nichttriviales Funktional der redundanten Freiheitsgrade  $\phi$ .

Nachdem sowohl mit den Relationen (2.138) – (2.140) die Transformationsmetrik  $M^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  als auch mit der Gleichung (2.156) die Determinante der Metrik bestimmt ist, können wir diese Ergebnisse in den Ausdruck (2.109) für den kinetischen Term des Hamiltonoperators einsetzen und erhalten für diesen nach einer entsprechenden Umformung die folgende Darstellung in den gekrümmten Koordinaten  $C$  und  $\phi$

$$\begin{aligned} H_T &= \frac{1}{2} \int d^3x \mathcal{J}^{-1}[C] P_i^a(\mathbf{x}) \mathcal{J}[C] P_i^a(\mathbf{x}) \\ &+ \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3x' \left[ \det(\lambda)^{-1} (-g) p_a(\mathbf{x}) \lambda^{-1}(\mathbf{x})_a^b \langle \mathbf{x}b | F | \mathbf{x}'c \rangle \det(\lambda) (-g) \lambda^{-1}(\mathbf{x}')_c^d p_d(\mathbf{x}') \right. \\ &\quad + \det(\lambda)^{-1} (-g) p_a(\mathbf{x}) \lambda^{-1}(\mathbf{x})_a^b \langle \mathbf{x}b | F \hat{D}_i | \mathbf{x}'c \rangle \det(\lambda) P_i^c(\mathbf{x}') \\ &\quad + \mathcal{J}^{-1}[C] (-P_i^a(\mathbf{x})) \langle \mathbf{x}a | \hat{D}_i F | \mathbf{x}'b \rangle \mathcal{J}[C] (-g) \lambda^{-1}(\mathbf{x}')_c^d p_c(\mathbf{x}') \\ &\quad \left. + \mathcal{J}^{-1}[C] (-P_i^a(\mathbf{x})) \langle \mathbf{x}a | \hat{D}_i F \hat{D}_j | \mathbf{x}'b \rangle \mathcal{J}[C] \left( -P_j^b(\mathbf{x}') \right) \right] \end{aligned} \quad (2.158)$$

mit dem Operator

$$F[C] = (\Gamma_i \hat{D}_i)^{-1} (\Gamma_j \Gamma_j^\dagger) (\hat{D}_n^\dagger \Gamma_n^\dagger)^{-1}. \quad (2.159)$$

In der vorliegenden Formulierung des kinetischen Operators sind mit den Koordinaten  $\phi^a$ , deren kanonisch konjugierten Impulse  $p_a$  und der Determinanten  $\det(\lambda)$  immer noch Objekte mit unphysikalischen Freiheitsgraden enthalten. Die Eliminierung dieser Freiheitsgrade durch die Auflösung des Gaußschen Gesetzes erfordert allerdings zunächst die Transformation dieser Zwangsbedingung in die neuen Koordinaten  $(C, \phi)$ .

### 2.6.2 Gaußoperator

Als Vorbereitung für die Transformation des Gaußschen Gesetzes (2.35) und die anschließende Elimination der redundanten Freiheitsgrade  $\phi$  werden wir im folgenden zunächst weitere relevante Größen definieren und einige wichtige Relationen ableiten. Analog zu (2.126) führen wir durch

$$i \frac{\partial U}{\partial \phi^a} U^{-1} \equiv t^b \Lambda_a^b \quad (2.160)$$

die Funktionen  $\Lambda$  ein, welche ebenfalls reell sind und aufgrund der Relation (2.125) mit den Funktionen  $\lambda$  über die orthogonale Matrix  $\hat{U}$  verknüpft sind

$$\Lambda_a^b = \hat{U}^{bc} \lambda_a^c, \quad (2.161)$$

und daher insbesondere übereinstimmende Determinanten

$$\det(\Lambda) = \det(\lambda) \quad (2.162)$$

besitzen. Ferner definieren wir mit Hilfe der Funktionen  $\lambda$  und  $\Lambda$  zwei Sätze von Operatoren  $\{j\}$  und  $\{J\}$

$$j^a \equiv (\lambda^{-1})_b^a p_b \quad (2.163)$$

$$J^a \equiv (\Lambda^{-1})_b^a p_b, \quad (2.164)$$

welche wiederum über die orthogonale Matrix  $\hat{U}$

$$J^a = \hat{U}^{ab} j^b \quad \text{bzw.} \quad j^a = \hat{U}^{ba} J^b \quad (2.165)$$

miteinander verbunden sind. Im Fall der  $SU(2)$ -Eichgruppe können die Operatoren  $\{J\}$  und  $\{j\}$  als verallgemeinerte Drehimpulsoperatoren im Labor- bzw. rotierenden Bezugssystem angesehen werden. Sowohl die Funktionen  $\lambda$ ,  $\Lambda$  als auch die Operatoren  $j$ ,  $J$  enthalten eine Ortsabhängigkeit, welche auf der Abhängigkeit dieser Größen von  $\phi^a(\mathbf{x})$  und  $p_a(\mathbf{x})$  basiert. Die Differentiation der Gleichung (2.126) nach  $\phi$  führt auf die Relation

$$\frac{\partial \lambda(\mathbf{x})_b^c}{\partial \phi^a(\mathbf{x}')} = 2 \operatorname{tr} \left( i U^{-1}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 U(\mathbf{x})}{\partial \phi^a(\mathbf{x}') \partial \phi^b(\mathbf{x})} t^c \right) + 2 \operatorname{tr} \left( i \frac{\partial U^{-1}(\mathbf{x})}{\partial \phi^a(\mathbf{x}')} \frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial \phi^b(\mathbf{x})} t^c \right) \quad (2.166)$$

und ermöglicht die Ableitung der Kommutatorrelation

$$\left[ j^a(\mathbf{x}), j^b(\mathbf{x}') \right] = -i f^{abc} j^c(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (2.167)$$

Eine entsprechende Relation läßt sich aus der nach  $\phi$  differenzierten Gleichung (2.160) für die Operatoren  $J$  herleiten

$$\left[ J^a(\mathbf{x}), J^b(\mathbf{x}') \right] = i f^{abc} J^c(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (2.168)$$

Ferner führt die Ableitung von (2.125) nach  $\phi$  auf den Zusammenhang

$$\frac{\partial \hat{U}^{bc}(\mathbf{x})}{\partial \phi^a(\mathbf{x}')} = 2 \operatorname{tr} \left( \frac{\partial U^{-1}(\mathbf{x})}{\partial \phi^a(\mathbf{x}')} t^b U(\mathbf{x}) t^c \right) + 2 \operatorname{tr} \left( U^{-1}(\mathbf{x}) t^b \frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial \phi^a(\mathbf{x}')} t^c \right), \quad (2.169)$$

aus dem sich die Beziehungen

$$\left[ j^a(\mathbf{x}), U^{bc}(\mathbf{x}') \right] = -i f^{acd} U^{bd}(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (2.170)$$

$$\left[ J^a(\mathbf{x}), U^{bc}(\mathbf{x}') \right] = i f^{abd} U^{dc}(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (2.171)$$

ableiten lassen. Mit Verwendung der Relationen (2.170) und (2.167) folgt dann die Vertauschbarkeit der beiden Operatoren  $J$  und  $j$

$$\left[ J^a(\mathbf{x}), j^b(\mathbf{x}') \right] = 0. \quad (2.172)$$

Die Anwendung der Determinantendarstellung  $\det(A) = \epsilon^{i_1 \dots i_N} A_{i_1} \dots A_{i_N}$ <sup>19</sup> einer Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  auf  $\det(\lambda)$  ermöglicht die Ableitung der Relation

$$\det(\lambda)^{-1} \frac{\partial}{\partial \phi^a(\mathbf{x})} \det(\lambda) = \lambda^{-1}(\mathbf{x})_b^c \frac{\partial}{\partial \phi^a(\mathbf{x})} \lambda(\mathbf{x})_b^c. \quad (2.173)$$

Insbesondere im Hinblick auf die Eliminierung der redundanten Freiheitsgrade  $\phi$  im Hamiltonoperator (2.158) im nächsten Abschnitt werden wir im folgenden eine sehr wichtige Relation ableiten, indem wir den Kommutator  $[p_a, (\lambda^{-1})_a^b \det(\lambda)]$  betrachten. Mit der Beziehung (2.173) folgt

$$\begin{aligned} \left[ p_a, (\lambda^{-1})_a^b \det(\lambda) \right] &= \frac{\delta [(\lambda^{-1})_a^b \det(\lambda)]}{i \delta \phi^a} \\ &= \frac{1}{i} \det(\lambda) \left( \frac{\delta (\lambda^{-1})_a^b}{\delta \phi^a} + (\lambda^{-1})_a^b (\lambda^{-1})_c^d \frac{\delta \lambda_c^d}{\delta \phi^a} \right). \end{aligned} \quad (2.174)$$

Die weitere Umformung unter Verwendung der Relation (2.166) und der Beziehung

$$\frac{\delta (\lambda^{-1})_a^b}{\delta \phi} = -(\lambda^{-1})_a^c \frac{\delta \lambda_c^d}{\delta \phi} (\lambda^{-1})_d^b$$

führt auf das Ergebnis

$$\left[ p_a, (\lambda^{-1})_a^b \det(\lambda) \right] = 0. \quad (2.175)$$

Für die Transformation des Gaußoperators (2.33)  $G^a(x) = g^{-1} \tilde{D}_i^{ab} \Pi_i^b(x)$  benötigen wir eine Relation, welche die im Gaußoperator enthaltene kovariante Ableitung

$$\tilde{D}_i^{ab}(A) = \delta^{ab} \partial_i + g(\hat{T}^c)^{ab} A_i^c \quad (2.176)$$

---

<sup>19</sup>Dabei ist  $\epsilon^{i_1 \dots i_N} = 1$ , falls  $(i_1, \dots, i_N)$  mit  $i_k \in \{1, \dots, N\}$  eine gerade Permutation darstellt,  $-1$ , falls  $(i_1, \dots, i_N)$  eine ungerade Permutation ist, und  $0$  für alle anderen Fälle.

bezüglich des Eichfelds  $A$  in der Weyleichung<sup>20</sup> mit der kovarianten Ableitung (2.128)  $\hat{D}_i^{ab}(C)$  verbindet. Dazu betrachten wir den Ausdruck

$$\tilde{D}_i^{ab}\hat{U}^{bc} = \delta^{ab}(\partial_i\hat{U}^{bc}) + \delta^{ab}\hat{U}^{bc}\partial_i - gf^{abd}A_i^d\hat{U}^{bc}. \quad (2.177)$$

Die Multiplikation von (2.101) mit dem Generator  $t^b$  und anschließender Spurbildung führt mit Verwendung von (2.125) und (2.160) auf die Darstellung

$$A_i^a = \hat{U}^{ab}C_i^b - \frac{1}{g}\Lambda_b^a(\partial_i\phi^b). \quad (2.178)$$

Für die in (2.177) enthaltene Ableitung  $(\partial_i\hat{U}^{bc})$  erhalten wir unter Benutzung der Relationen (2.125) und (2.160)

$$\partial_i\hat{U}^{bc} = (\partial_i\phi^d)\Lambda_d^e\hat{U}^{fc}f^{efb}. \quad (2.179)$$

Durch das Einsetzen der beiden Relationen (2.178) und (2.179) in die Gleichung (2.177) ergibt sich der Zusammenhang

$$\tilde{D}_i^{ab}\hat{U}^{bc} = \hat{U}^{ab}\hat{D}_i^{bc} \quad (2.180)$$

zwischen den beiden kovarianten Ableitungen  $\tilde{D}$  und  $\hat{D}$ .

Im folgenden werden wir unter Benutzung der bisherigen Ergebnisse zeigen, dass der Gaußoperator (2.33)  $G^a(x) = g^{-1}\tilde{D}_i^{ab}\Pi_i^b(x)$  und der Operator  $J^a(x)$  identisch sind und deshalb im Gaußschen Gesetz (2.35) keine Funktionalableitung nach dem eichfixierten Feld  $C$  auftritt. Dazu führen wir für den Gaußoperator die Umformung

$$\begin{aligned} G^a(\mathbf{x}) &= \frac{1}{g}\tilde{D}_i^{ab}(\mathbf{x})\frac{\delta}{i\delta A_i^b(\mathbf{x})} \\ &= \frac{1}{g}\int d^3x' \left[ \tilde{D}_i^{ab}(\mathbf{x})\frac{\delta\phi^c(\mathbf{x}')}{\delta A_i^b(\mathbf{x})}p_c(\mathbf{x}') + \tilde{D}_i^{ab}(\mathbf{x})\frac{\delta C_j^c(\mathbf{x}')}{\delta A_i^b(\mathbf{x})}P_j^c(\mathbf{x}') \right] \end{aligned} \quad (2.181)$$

durch und betrachten zunächst unter Anwendung von (2.136) den im zweiten Integral enthaltenen Term

$$\tilde{D}_i^{ab}(\mathbf{x})\frac{\delta C_j^c(\mathbf{x}')}{\delta A_i^b(\mathbf{x})} = \tilde{D}_i^{ab}(\mathbf{x})\hat{U}^{bc}(\mathbf{x})\delta_{ij}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') - \tilde{D}_i^{ab}(\mathbf{x})\langle\mathbf{x}'c|\hat{D}_j(\Gamma_k\hat{D}_k)^{-1}\Gamma_i|\mathbf{x}d\rangle\hat{U}^{bd}(\mathbf{x}). \quad (2.182)$$

Mit Verwendung der Relationen (2.180) und  $\tilde{D}_i^\dagger = -\tilde{D}_i$  finden wir

$$\tilde{D}_i^{ab}(\mathbf{x})\frac{\delta C_j^c(\mathbf{x}')}{\delta A_i^b(\mathbf{x})} = -\langle\mathbf{x}'c|\left(\hat{U}^T\delta_{ij} - \hat{D}_j(\Gamma_k\hat{D}_k)^{-1}\Gamma_i\hat{U}^T\right)\tilde{D}_i|\mathbf{x}a\rangle \quad (2.183)$$

und erhalten mit Benutzung der adjungierten Relation (2.180) das Ergebnis

$$\tilde{D}_i^{ab}(\mathbf{x})\frac{\delta C_j^c(\mathbf{x}')}{\delta A_i^b(\mathbf{x})} = 0. \quad (2.184)$$

<sup>20</sup>In diesem Abschnitt bezeichnen wir zur besseren Unterscheidung mit  $\tilde{D}_i$  die kovariante Ableitung bezüglich des Eichfelds  $A$  in der Weyleichung.

Die Umformung des ersten Terms in (2.181) mit Hilfe der Gleichung (2.132) und der Beziehung (2.180) führt auf

$$\begin{aligned}
 \tilde{D}_i^{ab}(\mathbf{x}) \frac{\delta \phi^c(\mathbf{x}')}{\delta A_i^b(\mathbf{x})} &= -\tilde{D}_i^{ab}(\mathbf{x}) g \lambda^{-1}(\mathbf{x}')^d \langle \mathbf{x}' d | (\Gamma_j \hat{D}_j)^{-1} \Gamma_i | \mathbf{x} e \rangle \hat{U}^{be}(\mathbf{x}) \\
 &= -g \lambda^{-1}(\mathbf{x}')^d \langle \mathbf{x}' d | (\Gamma_j \hat{D}_j)^{-1} \Gamma_i \hat{U}^\dagger \tilde{D}_i | \mathbf{x} a \rangle \\
 &= g \lambda^{-1}(\mathbf{x}')^d \langle \mathbf{x}' d | (\Gamma_j \hat{D}_j)^{-1} \Gamma_i \hat{D}_i \hat{U}^\dagger | \mathbf{x} a \rangle \\
 &= g \lambda^{-1}(\mathbf{x}')^d \hat{U}^{ad}(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}').
 \end{aligned} \tag{2.185}$$

Das Einsetzen dieser Relation zusammen mit (2.184) in die Darstellung (2.181) zeigt, daß der Gaußoperator tatsächlich mit dem Operator  $J^a$  übereinstimmt

$$G^a(\mathbf{x}) = J^a(\mathbf{x}) = \Lambda^{-1}(\mathbf{x})^a_b p_b(\mathbf{x}) \tag{2.186}$$

und deshalb im Gaußschen Gesetz (2.35) lediglich Funktionalableitungen bezüglich der redundanten Freiheitsgrade  $\phi$  auftreten.

### 2.6.3 Auflösung des Gaußschen Gesetzes

Aufgrund der Relation (2.186) besitzt das Gaußsche Gesetz (2.35) ohne die Anwesenheit äußerer Farbladungen in den neuen Feldkoordinaten  $(C, \phi)$  die Form

$$\Lambda^{-1}(\mathbf{x})^a_b \frac{\delta}{i \delta \phi_b(\mathbf{x})} \Psi[C, \phi] = 0. \tag{2.187}$$

Es wird daher von allen Wellenfunktionalen erfüllt, die nicht von den redundanten Freiheitsgraden  $\phi$  abhängen, aber ansonsten völlig beliebig sind

$$\Psi[C, \phi] = \Psi[C]. \tag{2.188}$$

Diese Wellenfunktionale müssen, bis auf die Normierbarkeit, keine Zwangsbedingungen mehr erfüllen und bilden daher den physikalischen Sektor des Hilbertraumes.

Im folgenden betrachten wir Matrixelemente des kinetischen Operators  $H_T$  (2.158) innerhalb dieses Hilbertraumsektors, indem wir die Zwangsbedingung (2.187), also  $p_a(\mathbf{x})\Psi = 0$ , implementieren. Dazu formen wir den Operator  $H_T$  (2.158) durch die Benutzung der Kommutatorrelation (2.175) um und erhalten dadurch die Darstellung

$$\begin{aligned}
 H_T &= \frac{1}{2} \int d^3x \mathcal{J}^{-1}[C] P_i^a(\mathbf{x}) \mathcal{J}[C] P_i^a(\mathbf{x}) \\
 &+ \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3x' \left[ \det(\lambda)^{-1} (-g) p_a(\mathbf{x}) \lambda^{-1}(\mathbf{x})^b \langle \mathbf{x} b | F | \mathbf{x}' c \rangle \det(\lambda) (-g) \lambda^{-1}(\mathbf{x}')^c_p p_a(\mathbf{x}') \right. \\
 &\quad + \det(\lambda)^{-1} (-g) \lambda^{-1}(\mathbf{x})^b_a \langle \mathbf{x} b | F \hat{D}_i | \mathbf{x}' c \rangle \det(\lambda) P_i^c(\mathbf{x}') p_a(\mathbf{x}) \\
 &\quad + \mathcal{J}^{-1}[C] (-P_i^a(\mathbf{x})) \langle \mathbf{x} a | \hat{D}_i F | \mathbf{x}' b \rangle \mathcal{J}[C] (-g) \lambda^{-1}(\mathbf{x}')^b_c p_c(\mathbf{x}') \\
 &\quad \left. + \mathcal{J}^{-1}[C] (-P_i^a(\mathbf{x})) \langle \mathbf{x} a | \hat{D}_i F \hat{D}_j | \mathbf{x}' b \rangle \mathcal{J}[C] \left( -P_j^b(\mathbf{x}') \right) \right]. \tag{2.189}
 \end{aligned}$$

Das Matrixelement  $\langle \Phi | H_T | \Psi \rangle$  dieses Operators bezüglich der beiden Wellenfunktionale  $\Phi$  und  $\Psi$ , welche beide  $p_a \Phi = p_a \Psi = 0$  und daher das Gaußsche Gesetz (2.187) erfüllen, hat dann die Form

$$\begin{aligned} \langle \Phi | H_T | \Psi \rangle &= \frac{1}{2} \int d^3x \langle \Phi | \mathcal{J}^{-1}[C] P_i^a(\mathbf{x}) \mathcal{J}[C] P_i^a(\mathbf{x}) | \Psi \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3x' \langle \Phi | \left[ \mathcal{J}^{-1}[C] (-P_i^a(\mathbf{x})) \langle \mathbf{x}a | \hat{D}_i F \hat{D}_j | \mathbf{x}'b \rangle \mathcal{J}[C] \left( -P_j^b(\mathbf{x}') \right) \right] | \Psi \rangle. \end{aligned} \quad (2.190)$$

Damit repräsentieren diese beiden verbleibenden Terme in  $H_T$  den physikalischen Anteil des kinetischen Operators  $H_T$ , und somit erhalten wir zusammen mit der potentiellen Energie (2.84) schließlich den Hamiltonoperator

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int d^3x [\mathcal{J}^{-1}[C] P_i^a(\mathbf{x}) \mathcal{J}[C] P_i^a(\mathbf{x}) + B_i^a(\mathbf{x}) B_i^a(\mathbf{x})] \\ &\quad + \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3x' \mathcal{J}^{-1}[C] (-P_i^a(\mathbf{x})) \langle \mathbf{x}a | \hat{D}_i F \hat{D}_j | \mathbf{x}'b \rangle \mathcal{J}[C] \left( -P_j^b(\mathbf{x}') \right). \end{aligned} \quad (2.191)$$

In dieser Formulierung sind die redundanten Freiheitsgrade  $\phi$  durch die Auflösung des Gaußschen Gesetzes vollständig eliminiert, da sowohl die Zustände (2.188) als auch der vorliegende Hamiltonoperator keine Abhängigkeit in  $\phi$  mehr besitzen.

Die Berechnung der Matrixelemente verschiedener Operatoren  $\mathcal{O}[C, P]$ , wie etwa des Hamiltonoperators (2.191), erfolgt in den neuen Feldkoordinaten  $(C, \phi)$  unter Verwendung der Transformationsdeterminanten (2.156) durch

$$\begin{aligned} \langle \Phi | \mathcal{O}[C, P] | \Psi \rangle &= \int \mathcal{D}A \Phi[C]^* \mathcal{O}[C, P] \Psi[C] \\ &= \int \mathcal{D}C \int \mathcal{D}\phi \left| \det \left( \frac{\partial(A)}{\partial(C, \phi)} \right) \right| \Phi[C]^* \mathcal{O}[C, P] \Psi[C] \\ &= \int \mathcal{D}C \int \mathcal{D}\phi \left| \det \left( \frac{1}{g} (\Gamma_j \Gamma_j^\dagger)^{-\frac{1}{2}} \right) \right| |\det(\lambda)| |\mathcal{J}[C]| \Phi[C]^* \mathcal{O}[C, P] \Psi[C] \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}C |\mathcal{J}[C]| \Phi[C]^* \mathcal{O}[C, P] \Psi[C]. \end{aligned} \quad (2.192)$$

Dabei bezeichnet

$$\mathcal{N} = \left| \det \left( \frac{1}{g} (\Gamma_j \Gamma_j^\dagger)^{-\frac{1}{2}} \right) \right| \int \mathcal{D}\phi |\det(\lambda)| \quad (2.193)$$

eine von  $C$  unabhängige und damit triviale Normierungskonstante, welche letztlich in die Normierung der beiden Zustände  $\Phi$  und  $\Psi$  zu absorbieren ist. Damit sind die Matrixelemente eichinvarianter Operatoren durch ein Pfadintegral über die gekrümmten Feldkoordinaten  $C$  bestimmt, wobei das nichttriviale Integrationsmaß  $\mathcal{J}[C]$  die Krümmung im Konfigurationsraum repräsentiert.

Im Fall der Coulombeichung, also bei der Wahl  $\Gamma_i = \partial_i$ , erhalten wir für den Hamiltonoperator (2.191) die Darstellung

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int d^3x [\mathcal{J}^{-1}[C] P_i^a(\mathbf{x}) \mathcal{J}[C] P_i^a(\mathbf{x}) + B_i^a(\mathbf{x}) B_i^a(\mathbf{x})] \\ &\quad + \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3x' \mathcal{J}^{-1}[C] \left( f^{acd} C_i^c(\mathbf{x}) P_i^d(\mathbf{x}) \right) F^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', C) \mathcal{J}[C] \left( f^{bef} C_j^e(\mathbf{x}') P_j^f(\mathbf{x}') \right) \end{aligned} \quad (2.194)$$

mit dem bereits in (2.95) eingeführten nicht-abelschen Coulombpropagator

$$F^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', C) = \langle \mathbf{x}a | (-\partial_i \hat{D}_i(C))^{-1} (-\Delta) (-\partial_j \hat{D}_j(C))^{-1} | \mathbf{x}'b \rangle. \quad (2.195)$$

Diese Formulierung (2.194) ist bis auf die Anwesenheit äußerer Farbladungen identisch zu der Darstellung (2.97) des Hamiltonoperators, die im Abschnitt 2.5 mit Hilfe der Faddeev-Popov-Methode abgeleitet wurde.

## Kapitel 3

# Variationsbehandlung der funktionalen Yang-Mills-Schrödingergleichung in Coulombbeichung

In diesem Kapitel untersuchen wir den Vakuumzustand der Yang-Mills-Theorie in der Coulombbeichung. Anstelle der üblichen Pfadintegralformulierung benützen wir hier das bereits im Kapitel 2 diskutierte funktionale Schrödingerbild der Yang-Mills-Theorie in der Coulombbeichung. Im Rahmen dieser Formulierung lösen wir, unter Verwendung eines Variationsprinzipes, die stationäre Schrödingergleichung der Yang-Mills-Theorie basierend auf dem Hamiltonoperator (2.97) in der Coulombbeichung. Hierfür verwenden wir einen physikalisch motivierten Ansatz für das Wellenfunktional des Vakuums, welcher am Gribov-Horizont divergent ist und damit die Tatsache berücksichtigt, daß die dominanten Infrarotfreiheitsgrade der Theorie, wie etwa Zentrumswirbel, auf dem Gribov-Horizont lokalisiert sind. Wir zeigen im Rahmen dieser Untersuchung, daß die Krümmung des Konfigurationsraumes, welche durch die Faddeev-Popov-Determinante repräsentiert wird, für das Infrarotverhalten von zentraler Bedeutung ist und damit das nicht-perturbative Verhalten der Theorie, insbesondere die Eigenschaft des Farbeinschlusses, bestimmt.

Das hier vorliegende Kapitel setzt sich aus den folgenden Teilen zusammen: Ausgehend von der Hamiltonschen Formulierung der Yang-Mills-Theorie in der Coulombbeichung im Abschnitt 3.1, diskutieren wir im Abschnitt 3.2 zunächst unseren physikalisch motivierten Ansatz für das Vakuumwellenfunktional und berechnen relevante Erwartungswerte. Wir betrachten dabei insbesondere verschiedene Propagatoren und die Krümmung im Konfigurationsraum. Anschließend berechnen wir im Abschnitt 3.3 die Vakuumenergie, welche ein Funktional der im Ansatz enthaltenen Variationsfunktion ist. Die Minimierung dieser Energie im Abschnitt 3.4 führt auf ein gekoppeltes System nichtlinearer Schwinger-Dyson-Integralgleichungen für die Gluonenergie, den Geistpropagator, die Krümmung im Konfigurationsraum und den Coulomb-Formfaktor.

Im Abschnitt 3.5 diskutieren wir dann für den Fall der  $(3 + 1)$ -dimensionalen Yang-Mills-Theorie die asymptotischen Eigenschaften der Lösungen dieser Integralgleichungen sowohl im ultravioletten als auch im infraroten Bereich. Nach einer ausführlichen Diskussion der Renormierung des Integralgleichungssystems präsentieren wir die vollständigen numerischen

Lösungen für  $D = 3 + 1$  Dimensionen.

Im Abschnitt 3.6 wenden wir die hier vorliegende nicht-perturbative Behandlung auf die  $(2 + 1)$ -dimensionale Yang-Mills-Theorie an, welche insbesondere im Hinblick auf den Mechanismus des Farbeinschlusses von Interesse ist. Im Gegensatz zur  $(3 + 1)$ -dimensionalen Theorie besitzt das Integralgleichungssystem für  $D = 2 + 1$  nur dann eine konsistente Lösung, falls die Krümmung des Konfigurationsraumes vollständig implementiert wird. Diese Aussage läßt sich ohne die Benutzung einer Näherung exakt beweisen und verdeutlicht damit die zentrale Bedeutung der Krümmung. Im folgenden diskutieren wir dann die Renormierung in  $D = 2 + 1$  und präsentieren anschließend die numerischen Lösungen.

Die in dem vorliegenden Kapitel 3 dargelegten Untersuchungen zur Yang-Mills-Theorie basieren auf den Arbeiten [40, 41, 42].

### 3.1 Hamiltonsche Formulierung der Yang-Mills-Theorie in Coulombeichung

Wir werden die hier zu diskutierende nicht-perturbative Behandlung der Yang-Mills-Theorie mit Hilfe des Variationsprinzips allgemein für  $D = d + 1$  Dimensionen ( $d = 2, 3$ ) ableiten. Der Ausgangspunkt für diese Variationsbehandlung bildet die im Kapitel 2 ausführlich erläuterte Hamiltonsche Formulierung der Yang-Mills-Theorie in der Coulombeichung. In dieser Eichung sind die physikalischen Freiheitsgrade (Koordinaten) der Theorie durch die transversalen Komponenten des Eichfeldes

$$A_i^\perp(\mathbf{x}) = t_{ij}(\mathbf{x})A_j(\mathbf{x}) \quad (3.1)$$

mit dem transversalen Projektor

$$t_{ij}(\mathbf{x}) = \delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\partial^2} \quad (3.2)$$

gegeben. Die kanonisch konjugierten Impulsoperatoren haben die Darstellung

$$\Pi_i^{\perp a}(\mathbf{x}) = t_{ik}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{i\delta A_k^a(\mathbf{x})} \equiv \frac{\delta}{i\delta A_i^{\perp a}(\mathbf{x})} \quad (3.3)$$

und erfüllen die Vertauschungsrelationen der kanonischen Quantisierung

$$\left[ A_i^{\perp a}(\mathbf{x}), \Pi_j^{\perp b}(\mathbf{x}') \right] = i\delta^{ab} t_{ij}(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (3.4)$$

$$\left[ A_i^{\perp a}(\mathbf{x}), A_j^{\perp b}(\mathbf{x}') \right] = \left[ \Pi_i^{\perp a}(\mathbf{x}), \Pi_j^{\perp b}(\mathbf{x}') \right] = 0. \quad (3.5)$$

Wie bereits im Abschnitt 2.5 gezeigt, besitzt der Hamiltonoperator in der Coulombeichung die Form

$$H = \frac{1}{2} \int d^d x \left[ \mathcal{J}^{-1}[A^\perp] \Pi_i^{\perp a}(\mathbf{x}) \mathcal{J}[A^\perp] \Pi_i^{\perp a}(\mathbf{x}) + B_i^a(\mathbf{x})^2 \right] + \frac{g^2}{2} \int d^d x \int d^d x' \mathcal{J}^{-1}[A^\perp] \rho^a(\mathbf{x}) F^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \mathcal{J}[A^\perp] \rho^b(\mathbf{x}'), \quad (3.6)$$

wobei durch die Faddeev-Popov-Determinante

$$\mathcal{J}[A^\perp] = \det \left( -\partial_i \hat{D}_i(A^\perp) \right) \quad (3.7)$$

mit  $\hat{D}_i = \partial_i + g\hat{A}_i^\perp$  die Krümmung des Konfigurationsraumes zum Ausdruck kommt. Das nicht-abelsche Magnetfeld

$$B_k = \frac{1}{2} \epsilon_{kij} F_{ij} \quad \text{für } d = 3 \quad (3.8)$$

$$B = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} F_{ij} \quad \text{für } d = 2 \quad (3.9)$$

ist im  $d = 2$  dimensionalen Fall ein skalares Feld, wobei  $\epsilon_{ij}$  den vollständig antisymmetrischen Tensor in 2 Raumdimensionen darstellt ( $\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1$ ,  $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0$ ). Dabei bezeichnet  $F_{ij}$  den nicht-abelschen Feldstärketensor

$$F_{ij} = \frac{i}{g} [D_i, D_j], \quad (3.10)$$

wobei  $D_i = \partial_i - igA_i$  die kovariante Ableitung in der fundamentalen Darstellung ist.

Wie die detaillierte Diskussion im Abschnitt 2.6 zeigt, basiert der kinetische Term des Hamiltonoperators (3.6) (erster Term) auf dem funktionaltheoretischen Analogon des Laplace-Beltrami-Operators [39] in einem gekrümmten Raum. Die magnetische Energie (zweiter Term) repräsentiert den Potentialterm für das Eichfeld. Der sogenannte Coulombterm (dritter Term) resultiert, ebenso wie der kinetische Term, aus der ursprünglichen kinetischen Energie in der Weyleichung und beschreibt die Wechselwirkung zwischen nicht-abelschen Farbladungsdichten

$$\rho^a(\mathbf{x}) = -\hat{A}_i^{\perp ab}(\mathbf{x}) \Pi_i^{\perp b}(\mathbf{x}) + \rho_m^a(\mathbf{x}) \quad (3.11)$$

über den Coulombpropagator

$$F^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \langle \mathbf{x}a | (-\hat{D}_i \partial_i)^{-1} (-\partial^2) (-\hat{D}_j \partial_j)^{-1} | \mathbf{x}'b \rangle. \quad (3.12)$$

Dieser Propagator ist das nicht-abelsche Analogon zu dem gewöhnlichen Coulombpropagator der QED  $\langle \mathbf{x} | \frac{1}{-\partial^2} | \mathbf{x}' \rangle$  und nimmt für das störungstheoretische Vakuum  $A^\perp = 0$  diese einfache Form an. Für die folgenden Berechnungen gehen wir von einer verschwindenden äußeren Farbladungsdichte  $\rho_m = 0$  aus.

Da der Faddeev-Popov-Operator  $-\partial_i \hat{D}_i[A^\perp]$  die Metrik des gekrümmten Konfigurationsraumes repräsentiert, beinhaltet das Integrationsmaß im Raum der transversalen Eichpotentiale  $A^\perp$  die Determinante  $\mathcal{J}[A^\perp]$  dieses Operators. Demzufolge ist das Matrixelement eines beliebigen Operators  $O[A^\perp, \Pi^\perp]$  bezüglich der Wellenfunktionale  $\Psi_1[A^\perp]$  und  $\Psi_2[A^\perp]$  durch

$$\langle \Psi_1 | O | \Psi_2 \rangle = \int \mathcal{D}A^\perp \mathcal{J}[A^\perp] \Psi_1^*[A^\perp] O[A^\perp, \Pi^\perp] \Psi_2[A^\perp] \quad (3.13)$$

definiert. Diese Darstellung des Matrixelementes  $\langle \Psi_1 | O | \Psi_2 \rangle$  haben wir bereits im Abschnitt 2.5 abgeleitet, indem wir in der Weyleichung von eichinvarianten Wellenfunktionalen ausgingen und die Fixierung der Coulombgleichung mit Hilfe der Faddeev-Popov-Methode vornahmen.

Analog zur Behandlung von kugelsymmetrischen Systemen in der gewöhnlichen Quantenmechanik ist der Übergang zu „radialen“ Wellenfunktionalen

$$\tilde{\Psi}[A^\perp] = \mathcal{J}^{\frac{1}{2}}[A^\perp] \Psi[A^\perp] \quad (3.14)$$

und der entsprechenden Transformation für die Operatoren

$$\tilde{O} = \mathcal{J}^{\frac{1}{2}}[A^\perp] O \mathcal{J}^{-\frac{1}{2}}[A^\perp] \quad (3.15)$$

für die weitere Behandlung von Vorteil. In dieser Darstellung verschwindet formal die Faddeev-Popov-Determinante  $\mathcal{J}[A^\perp]$  im Pfadintegral des Matrixelementes (3.13)

$$\langle \Psi_1 | O | \Psi_2 \rangle = \int \mathcal{D}A^\perp \tilde{\Psi}_1^*[A^\perp] \tilde{O} \tilde{\Psi}_2[A^\perp] \equiv \langle \tilde{\Psi}_1 | \tilde{O} | \tilde{\Psi}_2 \rangle. \quad (3.16)$$

In der vorliegenden Arbeit interessieren wir uns für die Struktur des Yang-Mills-Vakuums. Das Wellenfunktional, welches diesen Zustand beschreibt, ist definitionsgemäß die Lösung der funktionalen Yang-Mills-Schrödingergleichung

$$H\Psi = E\Psi \quad (3.17)$$

mit dem niedrigsten Energieeigenwert  $E$  und kann grundsätzlich mit Hilfe des Variationsprinzipes

$$\frac{\langle \Psi | H | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} \longrightarrow \min \quad (3.18)$$

berechnet werden. Für die konkrete Berechnung des Erwartungswertes des Hamiltonoperators  $\tilde{H} = \mathcal{J}^{\frac{1}{2}} H \mathcal{J}^{-\frac{1}{2}}$  ist es von Vorteil, eine partielle Integration im Pfadintegral der kinetischen Energie und der Coulombenergie durchzuführen.

Für die kinetische Energie gilt

$$\begin{aligned} E_k &= \langle \tilde{\Psi} | \tilde{H}_k | \tilde{\Psi} \rangle = \frac{1}{2} \int d^d x \int \mathcal{D}A^\perp \tilde{\Psi}^*[A^\perp] \mathcal{J}^{-\frac{1}{2}} \Pi_i^{\perp a}(\mathbf{x}) \mathcal{J}^{\frac{1}{2}} \mathcal{J}^{\frac{1}{2}} \Pi_i^{\perp a}(\mathbf{x}) \mathcal{J}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\Psi}[A^\perp] \\ &= \frac{1}{2} \int d^d x \int \mathcal{D}A^\perp \frac{\delta}{i \delta A_i^{\perp a}(\mathbf{x})} \left[ \tilde{\Psi}^*[A^\perp] \mathcal{J}^{\frac{1}{2}} \Pi_i^{\perp a}(\mathbf{x}) \mathcal{J}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\Psi}[A^\perp] \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \int d^d x \int \mathcal{D}A^\perp \left[ \tilde{\Pi}_i^{\perp a}(\mathbf{x}) \tilde{\Psi}[A^\perp] \right]^* \left[ \tilde{\Pi}_i^{\perp a}(\mathbf{x}) \tilde{\Psi}[A^\perp] \right] \end{aligned} \quad (3.19)$$

mit dem transformierten Impulsoperator

$$\tilde{\Pi}_i^{\perp a}(\mathbf{x}) = \mathcal{J}^{\frac{1}{2}}[A^\perp] \Pi_i^{\perp a}(\mathbf{x}) \mathcal{J}^{-\frac{1}{2}}[A^\perp]. \quad (3.20)$$

Wir gehen im folgenden davon aus, daß der Oberflächenterm (erster Term) in (3.19) keinen Beitrag zur Energie liefert. Die Umformung der Coulombenergie durch eine partielle Integration erfolgt auf dieselbe Weise, und wir erhalten damit insgesamt für den Erwartungswert des Hamiltonoperators (3.6)

$$E = \langle \Psi | H | \Psi \rangle = \langle \tilde{\Psi} | \tilde{H} | \tilde{\Psi} \rangle = E_k + E_p + E_c, \quad (3.21)$$

mit der kinetischen Energie

$$E_k = \frac{1}{2} \int \mathcal{D}A^\perp \int d^d x \left[ \tilde{\Pi}_i^{\perp a}(\mathbf{x}) \tilde{\Psi}[A^\perp] \right]^* \left[ \tilde{\Pi}_i^{\perp a}(\mathbf{x}) \tilde{\Psi}[A^\perp] \right], \quad (3.22)$$

der magnetischen Energie

$$E_p = \frac{1}{2} \int \mathcal{D}A^\perp \int d^d x \tilde{\Psi}^*[A^\perp] B_i^a(\mathbf{x})^2 \tilde{\Psi}[A^\perp] \quad (3.23)$$

und der Coulombenergie

$$E_c = -\frac{g^2}{2} \int \mathcal{D}A^\perp \int d^d x \int d^d x' \left[ \tilde{\Pi}_i^{\perp c}(\mathbf{x}) \tilde{\Psi}[A^\perp] \right]^* \hat{A}_i^{\perp ca}(\mathbf{x}) \cdot F^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \hat{A}_j^{\perp bd}(\mathbf{x}') \left[ \tilde{\Pi}_j^{\perp d}(\mathbf{x}') \tilde{\Psi}[A^\perp] \right]. \quad (3.24)$$

Für die Berechnung dieser Energien im Abschnitt 3.3 formen wir den transformierten Impulsoperator  $\tilde{\Pi}^\perp$  in eine geeignete Darstellung um

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_i^{\perp a}(\mathbf{x}) &= \mathcal{J}^{\frac{1}{2}}[A^\perp] \Pi_i^{\perp a}(\mathbf{x}) \mathcal{J}^{-\frac{1}{2}}[A^\perp] \\ &= \Pi_k^{\perp a}(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} \Pi_k^{\perp a}(\mathbf{x}) \ln \mathcal{J}[A^\perp]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Da der Faddeev-Popov-Operator  $(-\partial_i \hat{D}_i[A^\perp])$  innerhalb der „*fundamental modular region*“ (FMR) positiv definit ist, können wir die „*proper time*“-Darstellung [43, 44]

$$\ln \mathcal{J}[A^\perp] = \text{Tr} \left[ \ln(-\partial_i \hat{D}_i[A^\perp]) \right] = - \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \left( e^{-\tau(-\partial_i \hat{D}_i)} - e^{-\tau} \right) \quad (3.26)$$

benutzen und erhalten damit<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \Pi_i^{\perp a}(\mathbf{x}) \ln \mathcal{J}[A^\perp] &= \mathcal{J}[A^\perp] \text{Tr} \left[ (-\partial_i \hat{D}_i)^{-1} \Pi_i^{\perp a}(\mathbf{x}) (-\partial_j \hat{D}_j) \right] \\ &= -\frac{g}{i} t_{ij}(\mathbf{x}) \text{tr} \left[ \hat{T}^a \left( \partial_j^{x'} \langle \mathbf{x}' | (-\partial_k \hat{D}_k)^{-1} | \mathbf{x} \rangle \right)_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}} \right]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Unter Verwendung dieser Relation folgt für den transformierten Impulsoperator die explizite Darstellung

$$\tilde{\Pi}_i^{\perp a}(\mathbf{x}) = \Pi_i^{\perp a}(\mathbf{x}) + \frac{g}{2i} t_{ij}(\mathbf{x}) \text{tr} \left[ \hat{T}^a \left( \partial_j^{x'} G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \right)_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}} \right], \quad (3.28)$$

mit dem inversen Faddeev-Popov-Operator

$$G = \left( -\partial_i \hat{D}_i \right)^{-1}, \quad (3.29)$$

welcher im Farb- und Lorentzraum eine Matrix darstellt

$$\langle \mathbf{x}a | G | \mathbf{x}'b \rangle = \langle \mathbf{x}a | \left( -\partial_i \hat{D}_i \right)^{-1} | \mathbf{x}'b \rangle \equiv G^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'). \quad (3.30)$$

Der Vakuumerwartungswert dieses Operators definiert den Geistpropagator, welchen wir im Abschnitt 3.2.2 detailliert diskutieren werden. Formal läßt sich der Operator  $G$  in eine geometrische Reihe bezüglich des Eichpotentials  $A^\perp$  entwickeln

$$G = \left( -\partial^2 - g \hat{A}_i^\perp \partial_i \right)^{-1} = G_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left( g \hat{A}_i^\perp \partial_i G_0 \right)^n, \quad (3.31)$$

<sup>1</sup>In diesem Zusammenhang bedeutet Tr die Spur bezüglich Farb- und Lorentzraum, wohingegen tr lediglich die Spur im Farbraum bezeichnet.

wobei

$$G_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \langle \mathbf{x} | (-\partial^2)^{-1} | \mathbf{x}' \rangle \quad (3.32)$$

der freie Geistpropagator ist und mit dem gewöhnlichen statischen Coulombpropagator der QED übereinstimmt. Aus der Entwicklung (3.31) folgt für den inversen Faddeev-Popov-Operator  $G$  die kompakte Darstellung

$$G = G_0 + G_0 g \hat{A}_i^\perp \partial_i G, \quad (3.33)$$

welche auf der Matrixdarstellung bezüglich des Farb- und Lorentzraumes basiert.<sup>2</sup>

## 3.2 Wellenfunktional für das Yang-Mills-Vakuum und Propagatoren

Während die Umformungen im letzten Abschnitt keine Näherungen enthalten und somit exakt sind, müssen wir für die weitere Behandlung das Wellenfunktional des Yang-Mills-Vakuums im Rahmen eines Ansatzes näher spezifizieren.

### 3.2.1 Vakuumwellenfunktional

Die Form des exakten Wellenfunctionals der QED in Coulombbeichung [45] motiviert den folgenden Gaußschen Ansatz bezüglich der transversalen Eichfelder für das Yang-Mills-Vakuum

$$\tilde{\Psi}[A^\perp] = \langle A^\perp | \omega \rangle = \mathcal{N} \exp \left[ -\frac{1}{2} \int d^d x \int d^d x' A_i^{\perp a}(\mathbf{x}) \omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}') A_i^{\perp a}(\mathbf{x}') \right], \quad (3.34)$$

wobei die Konstante  $\mathcal{N}$  die Normierung  $\langle \tilde{\Psi} | \tilde{\Psi} \rangle = 1$  garantiert.<sup>3</sup> Die in diesem Ansatz enthaltene Variationsfunktion  $\omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  ist aufgrund der Translations- und Rotationsinvarianz lediglich vom Abstand  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  abhängig. Ferner gehen wir, Bezug nehmend auf die Isotropie des Farbraumes, der Einfachheit halber von einer diagonalen Variationsfunktion  $\omega$  im Farbraum aus.

Dieser Gaußsche Ansatz für das Yang-Mills-Vakuum enthält einige sehr interessante Aspekte. An dieser Stelle ist zu betonen, daß der Gaußsche Ansatz für das radiale Wellenfunktional  $\tilde{\Psi}$  (3.14) vorgenommen wurde, dessen Normierung durch ein „flaches“ Integrationsmaß erfolgt (3.16). Das ursprüngliche Wellenfunktional

$$\Psi[A^\perp] = \mathcal{J}^{-\frac{1}{2}}[A^\perp] \tilde{\Psi}[A^\perp] \quad (3.35)$$

enthält somit neben dem Gaußschen Ansatz  $\tilde{\Psi}$  die Faddeev-Popov-Determinante. Dieses Funktional  $\mathcal{J}[A^\perp]$  verschwindet am Gribov-Horizont und verursacht damit ein divergentes

<sup>2</sup>In der Ortsdarstellung hat (3.33) die Form

$$\langle \mathbf{x} a | G | \mathbf{x}' b \rangle = G^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = G_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \delta^{ab} + \int d^d x_1 \int d^d x_2 G_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) \delta^{ac} \langle \mathbf{x}_1 c | g \hat{A}_i^\perp \partial_i | \mathbf{x}_2 d \rangle \langle \mathbf{x}_2 d | G | \mathbf{x}' b \rangle$$

<sup>3</sup>Für die Quantenelektrodynamik (QED) ist das exakte Wellenfunktional des Vakuums durch  $\Psi[A] = \mathcal{N} \exp \left[ -\frac{1}{2} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} A_i^+(\mathbf{k}) |\mathbf{k}| A_i^+(-\mathbf{k}) \right]$  bestimmt (siehe Abschnitt 2.3.2).

Verhalten des Wellenfunktionals am Gribov-Horizont. Diese Betonung der Feldkonfigurationen am Gribov-Horizont berücksichtigt damit die Tatsache, daß die für das nicht-perturbative Verhalten wesentlichen Konfigurationen am Gribov-Horizont lokalisiert sind [46]. Des weiteren steht diese Vorstellung in Übereinstimmung mit dem Bild der Zentrumswirbel, welche für den Farbeinschluß verantwortlich sind [7] und ebenfalls am Gribov-Horizont liegen [12]. Wegen der Divergenz des Wellenfunktionals (3.35) am Gribov-Horizont werden alle Eichkonfigurationen auf diesem Horizont, insbesondere unerwünschte Eichkopien, miteinander identifiziert. Diese Identifikation aller Eichkonfigurationen am Gribov-Horizont stellt eine topologische Kompaktifizierung des Gribov-Horizontes dar und ist im Hinblick auf verbleibende Eichkopien am Gribov-Horizont für die Erhaltung der Eichinvarianz von großer Bedeutung. Aufgrund dieser Zusammenhänge benutzen wir in der vorliegenden Arbeit einen Gaußschen Ansatz für das radiale Wellenfunktional  $\tilde{\Psi}[A^\perp]$  und nicht für das ursprüngliche Wellenfunktional  $\Psi[A^\perp]$ . Somit unterscheidet sich unser Wellenfunktional in deutlicher Weise von einem Gaußschen Ansatz für  $\Psi[A^\perp]$ , welcher den Untersuchungen in [20, 21] zugrunde liegt.

Trotz der Divergenz des Wellenfunktionals  $\Psi[A^\perp]$  (3.35) am Gribov-Horizont kann es offensichtlich normiert werden. Ein Wellenfunktional, welches eine Divergenz am Gribov-Horizont besitzt, kann natürlich eine allgemeinere Form haben als der vorliegende Ansatz (3.35) für  $\Psi[A^\perp]$ . In diesem Zusammenhang stellt das Wellenfunktional

$$\Psi[A^\perp] = \mathcal{J}^{-\alpha}[A^\perp] \tilde{\Psi}[A^\perp] \quad (3.36)$$

mit dem zusätzlichen Variationsparameter  $\alpha$ , welcher ebenfalls durch die Minimierung der Vakuumenergiedichte bestimmt wird, eine Verallgemeinerung des Ansatzes (3.35) dar und beschreibt für  $\alpha > 0$  die Dominanz der Feldkonfigurationen am Gribov-Horizont. Wir werden im Kapitel 4 in detaillierter Weise den Einfluß des Parameters  $\alpha$  auf das Yang-Mills-Vakuum und die nicht-perturbativen Eigenschaften der Theorie untersuchen, beschränken uns allerdings in diesem Kapitel auf die Wahl  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

Im folgenden benutzen wir also den Gaußschen Ansatz für das radiale Wellenfunktional (3.34) und bestimmen die Variationsfunktion  $\omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  durch die Minimierung der Vakuumenergie. Im Hinblick auf die Berechnung von Erwartungswerten, insbesondere der Vakuumenergie  $\langle \Psi | H | \Psi \rangle$ , ist es zunächst notwendig, Erwartungswerte des Feldoperators  $A^\perp$  bezüglich des Wellenfunktionals (3.34) zu berechnen. Durch die Einführung eines geeigneten erzeugenden Funktionals der Form

$$\begin{aligned} Z[j] &= \left\langle \tilde{\Psi} \left| \exp \left[ \int d^d x j_i^a(\mathbf{x}) A_i^{\perp a}(\mathbf{x}) \right] \right| \tilde{\Psi} \right\rangle \\ &= \mathcal{N}^2 \int DA^\perp \exp \left[ - \int d^d x \int d^d x' A_i^{\perp a}(\mathbf{x}) \omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}') A_i^{\perp a}(\mathbf{x}') + \int d^d x j_i^a(\mathbf{x}) A_i^{\perp a}(\mathbf{x}) \right], \end{aligned} \quad (3.37)$$

wobei die Konstante  $\mathcal{N}$  die Normierung  $Z[j=0] = 1$  garantiert, können die Erwartungswerte des Feldoperators  $A^\perp$  allgemein durch die Funktionalableitungen des erzeugenden Funktionals  $Z[j]$  nach der Quelle  $j$  berechnet werden

$$\langle A_{i_1}^{\perp a_1}(\mathbf{x}_1) \dots A_{i_n}^{\perp a_n}(\mathbf{x}_n) \rangle_\omega \equiv \langle \omega | A_{i_1}^{\perp a_1}(\mathbf{x}_1) \dots A_{i_n}^{\perp a_n}(\mathbf{x}_n) | \omega \rangle = \left[ \frac{\delta^n Z[j]}{\delta j_{i_1}^{a_1}(\mathbf{x}_1) \dots \delta j_{i_n}^{a_n}(\mathbf{x}_n)} \right]_{j=0}. \quad (3.38)$$

Dementsprechend bestimmt sich der Erwartungswert eines beliebigen Funktionals  $O[A^\perp]$  des Eichfeldes  $A^\perp$  durch

$$\langle O[A^\perp] \rangle_\omega = \langle \omega | O[A^\perp] | \omega \rangle = \left( O \left[ \frac{\delta}{\delta j} \right] Z[j] \right)_{j=0}. \quad (3.39)$$

Dies ist die funktionale Form des Wickschen Theorems. Das erzeugende Funktional  $Z[j]$  (3.37) ist ein Gaußsches Pfadintegral und kann deshalb analytisch berechnet werden. Dazu benutzen wir die Umformung

$$\begin{aligned} & - \int d^d x \int d^d x' A_i^{\perp a}(\mathbf{x}) \omega(\mathbf{x} - \mathbf{x}') A_i^{\perp a}(\mathbf{x}') + \int d^d x j_i^a(\mathbf{x}) A_i^{\perp a}(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{4} \int d^d x \int d^d x' j_i^{\perp a}(\mathbf{x}) \omega^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') j_i^{\perp a}(\mathbf{x}') \\ & \quad - \int d^d x \int d^d x' \left( A_i^{\perp a}(\mathbf{x}) - \alpha_i^{\perp a}(\mathbf{x}) \right) \omega(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \left( A_i^{\perp a}(\mathbf{x}') - \alpha_i^{\perp a}(\mathbf{x}') \right) \end{aligned} \quad (3.40)$$

mit

$$\alpha_i^{\perp a}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int d^d x' \omega^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') j_i^{\perp a}(\mathbf{x}') \quad (3.41)$$

und führen im Pfadintegral (3.37) die Koordinatentransformation  $A_i^{\perp a}(\mathbf{x}) = A_i^{\perp a}(\mathbf{x}) - \alpha_i^{\perp a}(\mathbf{x})$  durch. Dies führt dann auf die Darstellung des erzeugenden Funktionals

$$Z[j] = \exp \left[ \frac{1}{4} \int d^d x \int d^d x' j_i^a(\mathbf{x}) t_{ij}(\mathbf{x}) \omega^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') j_j^a(\mathbf{x}') \right]. \quad (3.42)$$

Eine alternative und sehr praktische Formulierung des Wickschen Theorems (3.39) erhalten wir durch die Benutzung der Identität

$$F \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) G(x) = \left[ G \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) F(y) e^{xy} \right]_{y=0} \quad (3.43)$$

in der folgenden Form

$$\langle O[A^\perp] \rangle_\omega = \left\{ \exp \left[ \frac{1}{4} \int d^d x \int d^d x' \frac{\delta}{\delta A_i^{\perp a}(\mathbf{x})} t_{ij}(\mathbf{x}) \omega^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\delta}{\delta A_j^{\perp a}(\mathbf{x}')} \right] O[A^\perp] \right\}_{A^\perp=0}. \quad (3.44)$$

Der Erwartungswert eines beliebigen Produktes von Feldoperatoren  $A^\perp$  kann somit durch den freien Gluonpropagator

$$\langle A_i^{\perp a}(\mathbf{x}) A_j^{\perp b}(\mathbf{x}') \rangle_\omega = \frac{1}{2} \delta^{ab} t_{ij}(\mathbf{x}) \omega^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (3.45)$$

dargestellt werden (Wicksches Theorem). Demzufolge verschwindet der Erwartungswert eines ungeraden Produktes von Feldoperatoren unter Verwendung des Wellenfunktionals (3.35). Da die Variationsfunktion  $\omega(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  lediglich vom Abstand  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  abhängt, ist es für die

folgenden Berechnungen von praktischem Nutzen, die Impulsdarstellung durch die Fouriertransformation

$$A^\perp(\mathbf{x}) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} A^\perp(\mathbf{k}) \quad (3.46)$$

einzuführen. Im Impulsraum besitzt das Wellenfunktional (3.34) die Darstellung

$$\tilde{\Psi}[A^\perp] = \langle A^\perp | \omega \rangle = \mathcal{N} \exp \left[ -\frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} A_i^{\perp a}(\mathbf{k}) \omega(\mathbf{k}) A_i^{\perp a}(-\mathbf{k}) \right] \quad (3.47)$$

und der freie Gluonpropagator die Form

$$\langle \omega | A_i^{\perp a}(\mathbf{k}) A_j^{\perp b}(\mathbf{k}') | \omega \rangle = \delta^{ab} \frac{t_{ij}(\mathbf{k})}{2\omega(\mathbf{k})} (2\pi)^d \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') . \quad (3.48)$$

In diesem Zusammenhang repräsentiert  $\omega(\mathbf{k})$  die Energie eines Gluons mit dem Impuls  $\mathbf{k}$ . Im Hinblick auf die Normierbarkeit des Wellenfunktionals (3.35) muß die Gluonenergie  $\omega(k)$  positiv definit sein.

### 3.2.2 Geistpropagator und Geist-Gluon-Vertex

Als Vorbereitung für die Umformungen in den folgenden Abschnitten betrachten wir an dieser Stelle den Geistpropagator

$$G_\omega \equiv \langle G \rangle_\omega = \langle \omega | G | \omega \rangle , \quad (3.49)$$

welcher als Erwartungswert des inversen Faddeev-Popov-Operators (3.29) definiert ist. Obwohl wir, im Gegensatz zur Faddeev-Popov-Eichfixierung, in dem hier vorliegenden Operatorformalismus keine explizite Einführung von Geistfeldern benötigen, erweist sich die Einführung dieses Erwartungswerts für die späteren Diskussionen als sehr nützlich. Unter Benutzung der Tatsache, daß der freie Geistpropagator  $G_0$  unabhängig vom Eichfeld ist, also  $G_0 | \omega \rangle = | \omega \rangle G_0$  gilt, erhalten wir durch die Bildung des Erwartungswerts von Gl. (3.33) den Ausdruck

$$G_\omega = G_0 + G_0 \left\langle g \hat{A}_i^\perp \partial_i G \right\rangle_\omega . \quad (3.50)$$

Dieser Erwartungswert kann grundsätzlich mit Hilfe der geometrischen Reihe (3.31) berechnet werden. Durch die Einführung der irreduziblen Einteilchen-Selbstenergie  $\Sigma$  des Geistes

$$\left\langle g \hat{A}_i^\perp \partial_i G \right\rangle_\omega \equiv \Sigma \langle G \rangle_\omega = \Sigma G_\omega \quad (3.51)$$

erhalten wir dann eine kompakte Darstellung des Geistpropagators  $G_\omega$  in der Form einer Dyson-Gleichung

$$G_\omega = G_0 + G_0 \Sigma G_\omega . \quad (3.52)$$

Eine weitere wichtige Größe für die folgenden Berechnungen ist der Erwartungswert der Funktionalableitung des Geistpropagators

$$\left\langle \frac{\delta}{\delta A_k^{\perp a}(\mathbf{x})} G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \right\rangle_\omega = - \left\langle \int d^d y_1 \int d^d y_2 G(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) \frac{\delta G^{-1}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)}{\delta A_k^{\perp a}(\mathbf{x})} G(\mathbf{y}_2, \mathbf{x}_2) \right\rangle_\omega . \quad (3.53)$$

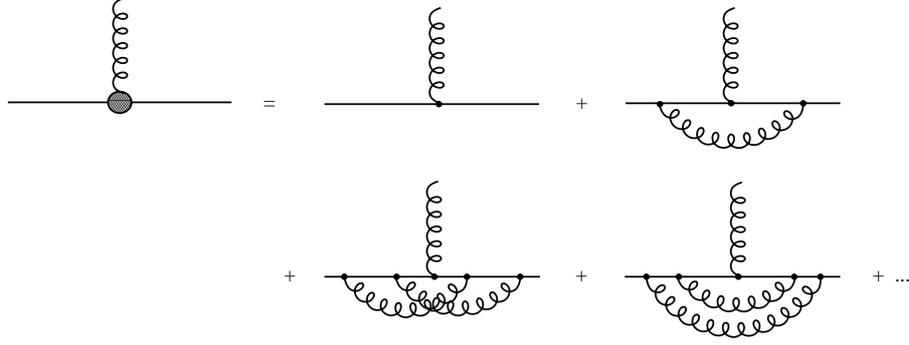


Abbildung 3.1: Diagrammatische Darstellung des Geist-Gluon-Vertex. Die vollen bzw. gekringelten Linien repräsentieren den vollen Geist- bzw. Gluonpropagator. Ferner bedeuten einfache bzw. fette Punkte den nackten bzw. vollen Geist-Gluon-Vertex.

Dieser Erwartungswert läßt sich unter Benutzung der Entwicklung (3.52) für den Geistpropagator und die Anwendung des Wickschen Theorems konkret berechnen. Die Struktur der bei dieser Entwicklung auftretenden Feynman-Diagramme ist in der Abb. 3.1 dargestellt. Sie beschreiben die Propagation eines Geistteilchens, gefolgt von einer Wechselwirkung mit einem externen Gluon und erneuter Propagation eines Geistteilchens. Basierend auf der Struktur dieser Feynman-Diagramme können wir den Geist-Gluon-Vertex  $\Gamma_k^a$  durch die Gleichung

$$\left\langle \frac{\delta}{\delta A_k^{\perp a}(\mathbf{x})} G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \right\rangle_{\omega} = \int d^d y_1 \int d^d y_2 G_{\omega}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) \Gamma_k^a(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2; \mathbf{x}) G_{\omega}(\mathbf{y}_2, \mathbf{x}_2) \quad (3.54)$$

definieren. Der Geist-Gluon-Vertex ist damit genau durch die in Abb. 3.1 dargestellte Entwicklung der Feynman-Diagramme gegeben. Wir bezeichnen den führenden Term in dieser Entwicklung (erster Term) als nackten Vertex  $\Gamma_k^{0,a}$  und erhalten durch den Vergleich der Gleichungen (3.53) und (3.54) die folgende explizite Darstellung im Ortraum

$$\begin{aligned} \Gamma_k^{0,a}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{y}) &= -\frac{\delta G^{-1}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}{\delta A_k^{\perp a}(\mathbf{y})} = \frac{\delta}{\delta A_k^{\perp a}(\mathbf{y})} \langle \mathbf{x}_1 | g \hat{A}_i^{\perp} \partial_i | \mathbf{x}_2 \rangle = g \frac{\delta}{\delta A_k^{\perp a}(\mathbf{y})} \hat{A}_i^{\perp}(\mathbf{x}_1) \partial_i^{x_1} \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \\ &= g t_{kl}(\mathbf{y}) \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}_1) \hat{T}^a \partial_l^{x_1} \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \end{aligned} \quad (3.55)$$

und alternativ im Impulsraum

$$\Gamma_k^{0,a}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{y}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \Gamma_k^{0,a}(\mathbf{q}, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{y}-\mathbf{x}_1)} \cdot e^{i\mathbf{q}(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)} \quad (3.56)$$

mit

$$\Gamma_k^{0,a}(\mathbf{q}, \mathbf{k}) = i g \hat{T}^a t_{kl}(\mathbf{k}) q_l. \quad (3.57)$$

### 3.2.3 Selbstenergie der Geistfelder

Die Berechnung der in Gleichung (3.51) definierten Selbstenergie  $\Sigma$  des Geistes erfolgt durch die Anwendung des Wickschen Theorems in der Form (3.44)

$$\begin{aligned}
 \Sigma G_\omega &= \left\langle g \hat{A}_k^\perp \partial_k G \right\rangle_\omega \\
 &= \left\{ \exp \left[ \frac{1}{4} \int d^d x \int d^d x' \frac{\delta}{\delta A_i^{\perp a}(\mathbf{x})} t_{ij}(\mathbf{x}) \omega^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\delta}{\delta A_j^{\perp a}(\mathbf{x}')} \right] g \hat{A}_k^\perp \partial_k G \right\}_{A^\perp=0} \\
 &= \left\{ \left[ \exp \left( \frac{1}{4} \int d^d x \int d^d x' \frac{\delta}{\delta A_i^{\perp a}(\mathbf{x})} t_{ij}(\mathbf{x}) \omega^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\delta}{\delta A_j^{\perp a}(\mathbf{x}')} \right), g \hat{A}_k^\perp \partial_k \right] G \right\}_{A^\perp=0}.
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

Die weitere Umformung mit Hilfe der Identität

$$\left[ e^{f(\frac{\delta}{\delta A})}, A \right] = \left[ f \left( \frac{\delta}{\delta A} \right), A \right] e^{f(\frac{\delta}{\delta A})} \tag{3.59}$$

und der Verwendung des aus den Gleichungen (3.29) und (3.55) resultierenden Zusammenhangs  $\frac{\delta}{\delta A^\perp} g \hat{A}_k^\perp \partial_k = -\frac{\delta}{\delta A^\perp} G^{-1} = \Gamma^0$  mit dem nackten Geist-Gluon-Vertex  $\Gamma^0$  führt dann auf

$$\begin{aligned}
 &\int d^d x_3 \Sigma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3) G_\omega(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2) \\
 &= \left\{ \frac{1}{2} \int d^d y_1 \int d^d y_2 \int d^3 x_3 \frac{\delta}{\delta A_k^{\perp c}(\mathbf{y}_1)} t_{kl}(\mathbf{y}_1) \omega^{-1}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \Gamma_l^{0,c}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3; \mathbf{y}_2) \right. \\
 &\quad \left. \exp \left[ \frac{1}{4} \int d^d x \int d^d x' \frac{\delta}{\delta A_i^{\perp a}(\mathbf{x})} t_{ij}(\mathbf{x}) \omega^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\delta}{\delta A_j^{\perp a}(\mathbf{x}')} \right] G(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2) \right\}_{A^\perp=0}.
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

Da sowohl  $\Sigma^0$  als auch  $\omega$  unabhängig vom Eichfeld  $A^\perp$  sind, wirkt die Funktionalableitung ausschließlich auf  $G(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2)$ . Damit folgt durch erneute Anwendung des Wickschen Theorems (3.44)

$$\begin{aligned}
 \int d^d x_3 \Sigma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3) G_\omega(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2) &= \frac{1}{2} \int d^d y_1 \int d^d y_2 \int d^d x_3 t_{kl}(\mathbf{y}_1) \omega^{-1}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \\
 &\quad \cdot \Gamma_l^{0,c}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3; \mathbf{y}_2) \left\langle \frac{\delta}{\delta A_k^{\perp c}(\mathbf{y}_1)} G(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2) \right\rangle_\omega.
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

Durch die Ersetzung des verbleibenden Erwartungswertes  $\left\langle \frac{\delta}{\delta A^\perp} G \right\rangle$  mit der Definitionsgleichung (3.54) des Geist-Gluon-Vertex erhalten wir die Darstellung der vollen Selbstenergie der Geistfelder

$$\begin{aligned}
 \Sigma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= \int d^d y_1 \int d^d y_2 \int d^d x_3 \int d^d x_4 D_{kl}^{ab}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \Gamma_l^{0,b}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3; \mathbf{y}_2) \\
 &\quad \cdot G_\omega(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) \Gamma_k^a(\mathbf{x}_4, \mathbf{x}_2; \mathbf{y}_1),
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

wobei wir mit

$$D_{kl}^{ab}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = \frac{1}{2} t_{kl}(\mathbf{y}_1) \omega^{-1}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \delta^{ab} \tag{3.63}$$

den Gluonpropagator bezeichnen. Sowohl der Geist-Gluon-Vertex  $\Gamma^a$  als auch der Geistpropagator  $G_\omega$  sind in der fundamentalen Darstellung der Eichgruppe nichtdiagonale Matrizen im Farbraum. Lediglich der Gluonpropagator (3.63) besitzt wegen des speziellen Ansatzes für das Wellenfunktional (3.34) eine diagonale Farbstruktur. Die diagrammatische Darstellung der Selbstenergie  $\Sigma$  der Geister, basierend auf der Gleichung (3.62), ist in der Abb. 3.2 dargestellt.

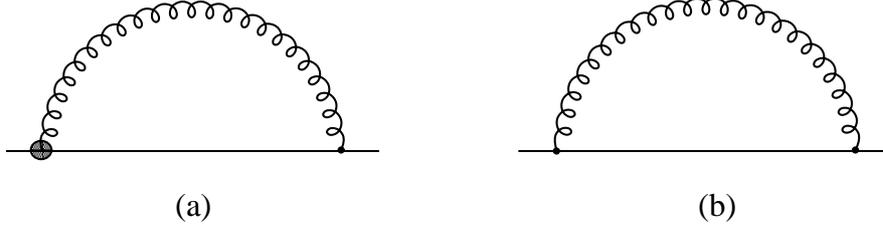


Abbildung 3.2: Diagrammatische Darstellung der Selbstenergie des Geistes aus Gl. (3.62). (a) exakt, (b) in der „rainbow ladder“-Näherung.

Verschiedene Untersuchungen zum Geist-Gluon-Vertex (z. B. in der Landau-Eichung [47]) zeigen, daß das „vertex dressing“ eine untergeordnete Rolle spielt und damit die sogenannte „rainbow ladder“-Näherung, in der der volle Geist-Gluon-Vertex  $\Gamma$  durch den nackten Vertex  $\Gamma^0$  ersetzt wird, gerechtfertigt ist. Mit der Verwendung dieser „rainbow ladder“-Näherung erhalten wir für die Geistselbstenergie  $\Sigma$  den Ausdruck

$$\Sigma^{ab}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{1}{2} \delta^{ab} N_C g^2 t_{kl}(\mathbf{x}_2) \omega^{-1}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \partial_k^{x_1} \partial_l^{x_2} G_\omega(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \quad (3.64)$$

wobei wir die Relation

$$\left( \hat{T}^c \hat{T}^c \right)^{ab} = -\delta^{ab} N_C \quad (3.65)$$

benutzen.

### 3.2.4 Geist- und Coulomb-Formfaktor

Durch die Iteration der Dyson-Gleichung (3.52) für den Geistpropagator erhalten wir eine geometrische Reihe in Potenzen von  $\Sigma G_0$

$$G_\omega = G_0 \sum_{n=0}^{\infty} (\Sigma G_0)^n = G_0 \frac{1}{1 - \Sigma G_0} \equiv G_0 \frac{d}{g}. \quad (3.66)$$

Die letzte Relation definiert den Geistformfaktor  $d$

$$d = \frac{g}{1 - \Sigma G_0}. \quad (3.67)$$

Unter Verwendung der in Abb. 3.2(b) diagrammatisch dargestellten „rainbow ladder“-Näherung für die Selbstenergie  $\Sigma$  ergibt sich mit der Dyson-Gleichung (3.52) für den Formfaktor des Geistpropagators

$$gd^{-1} = 1 - \Sigma G_0 \equiv 1 - gI_d \quad (3.68)$$

bzw. nach der Fouriertransformation

$$\begin{aligned} \frac{1}{d(\mathbf{k})} &= \frac{1}{g} - I_d(\mathbf{k}) \\ I_d(\mathbf{k}) &= \frac{N_C}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \left(1 - (\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{q}})^2\right) \frac{d(\mathbf{k} - \mathbf{q})}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 \omega(\mathbf{q})}, \end{aligned} \quad (3.69)$$

mit  $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$ . Aus der Kenntnis des Geistpropagators  $G$  können wir mit Hilfe der Relation

$$g \frac{\partial G}{\partial g} = -G + F \quad (3.70)$$

den Coulombpropagator  $F$  bestimmen. Dieser Zusammenhang folgt unmittelbar aus den Definitionen (3.29) und (3.12) für den Geist- bzw. Coulombpropagator und kann in die kompakte Form

$$F = \frac{\partial}{\partial g} (gG) \quad (3.71)$$

umgeformt werden. Basierend auf der Struktur des Coulombpropagators

$$F_\omega \equiv \langle F \rangle_\omega = \langle G(-\partial^2)G \rangle_\omega \quad (3.72)$$

bietet sich die Einführung eines Formfaktors an, welcher ein Maß für die Abweichung dieses Erwartungswertes von der faktorisierten Form  $\langle G \rangle_\omega (-\partial^2) \langle G \rangle_\omega$  darstellt. Dementsprechend definieren wir im Impulsraum den Coulombformfaktor  $f(k)$  durch

$$\begin{aligned} F_\omega(\mathbf{k}) &= G_\omega(\mathbf{k}) \mathbf{k}^2 f(\mathbf{k}) G_\omega(\mathbf{k}) \\ &= \frac{1}{g^2} \frac{1}{\mathbf{k}^2} d(\mathbf{k}) f(\mathbf{k}) d(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (3.73)$$

wobei wir für  $G_\omega$  die Gl. (3.66) benutzen. Andererseits ergibt sich durch die Bildung des Erwartungswertes von Gl. (3.71)

$$F_\omega = \left\langle \omega \left| \frac{\partial}{\partial g} (gG) \right| \omega \right\rangle. \quad (3.74)$$

Die Variationsfunktion  $\omega$  wird durch die in Abschnitt 3.4 diskutierte Energieminimierung bestimmt und ist somit von der Kopplungskonstanten  $g$  abhängig. Unter Vernachlässigung dieser impliziten  $g$ -Abhängigkeit von  $\omega$  können wir die Relation  $\langle \omega | \frac{\partial G}{\partial g} | \omega \rangle = \frac{\partial}{\partial g} G_\omega$  benutzen und erhalten dann basierend auf den Gl. (3.74), (3.73) und (3.66) für den Coulombformfaktor

$$f(\mathbf{k}) = g^2 d^{-1}(\mathbf{k}) \frac{\partial d(\mathbf{k})}{\partial g} d^{-1}(\mathbf{k}) = -g^2 \frac{\partial}{\partial g} d^{-1}(\mathbf{k}). \quad (3.75)$$

An dieser Stelle ist nochmals darauf hinzuweisen, daß diese Relation zwischen  $f(k)$  und  $d(k)$ , welche in [48] erstmals abgeleitet wurde, nur dann gültig ist, wenn die implizite  $g$ -Abhängigkeit von  $\omega$  vernachlässigt wird. Die in den obigen Gleichungen enthaltenen Greensfunktionen, Formfaktoren und Vertices, wie etwa  $G_\omega$ ,  $\Sigma$ ,  $d$  und  $f$ , sind Matrizen im Farbraum in der adjungierten Darstellung der Eichgruppe.

Die Selbstenergie  $\Sigma$  (3.64) des Geistes ist im Rahmen der in Abb. 3.2(b) diagrammatisch dargestellten „rainbow ladder“-Näherung ein Einschleifendiagramm. Innerhalb dieser Näherung hat der Geistformfaktor (3.69) eine diagonale Farbstruktur, und mit Verwendung der Relation (3.75) folgt damit für den Coulombformfaktor

$$f(\mathbf{k}) = 1 + I_f(\mathbf{k}), \quad (3.76)$$

$$I_f(\mathbf{k}) = \frac{N_C}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \left(1 - (\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{q}})^2\right) \frac{d(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 f(\mathbf{k} - \mathbf{q})}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 \omega(\mathbf{q})}.$$

Die diagrammatische Struktur dieser Integralgleichung ist in der Abb. 3.3(a) dargestellt. Die Iteration dieser Gleichung führt auf die in Abb. 3.3(b) dargestellte Entwicklung und zeigt, daß der Coulombformfaktor in führender Ordnung durch  $f(k) = 1$  gegeben ist.

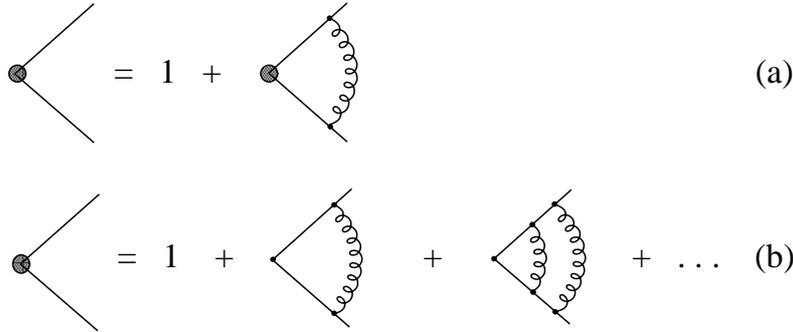


Abbildung 3.3: (a) Diagrammatische Darstellung der Integralgleichung (3.76) für den Coulombformfaktor, (b) Diagrammatische Reihenentwicklung der Integralgleichung in (a).

### 3.2.5 Krümmung im Konfigurationsraum

Wie bereits im Abschnitt 3.1 beschrieben, ist der Konfigurationsraum der transversalen Eichpotentiale  $A^\perp$  ein gekrümmter Funktionenraum. Die Krümmung dieses Raumes kommt durch eine nichttriviale Metrik zum Ausdruck, welche durch den Faddeev-Popov-Operator  $-\partial_i \hat{D}_i$  gegeben ist. Die Untersuchungen im vorliegenden Kapitel 3, als auch die im nächsten Kapitel 4, werden zeigen, daß diese Krümmung für das Infrarotverhalten der Theorie, und damit insbesondere für das nicht-perturbative Verhalten, von zentraler Bedeutung ist. Aufgrund dessen leiten wir in diesem Abschnitt über den Erwartungswert eines geeigneten Operators eine Krümmungsfunktion ab, welche den Einfluß dieser Krümmung im Konfigurationsraum repräsentiert.

Dazu betrachten wir zunächst den Operator  $\frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta A^\perp}$  unter Benutzung der Gl. (3.26) und (3.27)

$$\frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta A_k^{\perp a}(\mathbf{x})} = \frac{\delta}{\delta A_k^{\perp a}(\mathbf{x})} \text{Tr} \ln G^{-1} = \text{Tr} \left( G \frac{\delta G^{-1}}{\delta A_k^{\perp a}(\mathbf{x})} \right) \quad (3.77)$$

und erhalten mit der Definition des nackten Geist-Gluon-Vertex (3.55) den Ausdruck

$$\frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta A_k^{\perp a}(\mathbf{x})} = -\text{Tr} \left( G \Gamma_k^{0,a}(\mathbf{x}) \right). \quad (3.78)$$

Mit dieser Relation können wir den Impulsoperator (3.28) in der Form

$$\tilde{\Pi}_k^{\perp a}(\mathbf{x}) = \Pi_k^{\perp a}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2i} \text{Tr} \left( G \Gamma_k^{0,a}(\mathbf{x}) \right) \quad (3.79)$$

darstellen. Da der nackte Geist-Gluon-Vertex  $\Gamma^0$  unabhängig vom Eichfeld  $A^\perp$  ist, erhalten wir für den Erwartungswert von (3.78)

$$\left\langle \frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta A_k^{\perp a}(\mathbf{x})} \right\rangle_\omega = -\text{Tr} \left( G_\omega \Gamma_k^{0,a}(\mathbf{x}) \right). \quad (3.80)$$

Wir definieren an dieser Stelle einen Krümmungstensor  $\chi_{ij}^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  bezüglich Lorentz- und Farbraum über den Erwartungswert der zweiten Funktionalableitung von  $\ln \mathcal{J}$

$$\chi_{ij}^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{1}{2} \left\langle \frac{\delta^2 \ln \mathcal{J}}{\delta A_i^{\perp a}(\mathbf{x}) \delta A_j^{\perp b}(\mathbf{x}')} \right\rangle_\omega. \quad (3.81)$$

Mit Verwendung von Gl. (3.78) und der Definition des Geist-Gluon-Vertex (3.54) erhalten wir für den Krümmungstensor die Darstellung

$$\begin{aligned} \chi_{ij}^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= - \left\langle \text{Tr} \left[ \frac{\delta G}{\delta A_i^{\perp a}(\mathbf{x})} \Gamma_j^{0,b}(\mathbf{x}') \right] \right\rangle_\omega = -\text{Tr} \left[ \left\langle \frac{\delta G}{\delta A_i^{\perp a}(\mathbf{x})} \right\rangle_\omega \Gamma_j^{0,b}(\mathbf{x}') \right] \\ &= -\text{Tr} \left[ G_\omega \Gamma_i^a(\mathbf{x}) G_\omega \Gamma_j^{0,b}(\mathbf{x}') \right]. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Diese Größe repräsentiert diejenigen Anteile der Selbstenergie des Gluons, welche durch eine Geistschleife gebildet werden. Aus der Sicht der Vielteilchentheorie stellt dieser Term eine Gluonpolarisation dar. Andererseits läßt sich der Krümmungstensor  $\chi_{ij}^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  auch als die nicht-abelsche dielektrische Suszeptibilität des Yang-Mills-Vakuums verstehen, welche durch die Anwesenheit der Geister und damit der Krümmung im Konfigurationsraum entsteht. Aufgrund dieser physikalischen Interpretationen bezeichnen wir  $\chi_{ij}^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  als Krümmungstensor und definieren durch

$$\chi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{(d-1)} \frac{1}{N_C^2 - 1} \delta^{ab} t_{ij}(\mathbf{x}) \chi_{ij}^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \quad (3.83)$$

die skalare Krümmung.<sup>4</sup> Diese Krümmung  $\chi(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  ist ausschließlich durch den Geistpropagator  $G_\omega = \langle (-\partial_i \hat{D}_i)^{-1} \rangle_\omega$ , also den Erwartungswert der inversen Metrik  $(-\partial_i \hat{D}_i)^{-1}$ , bestimmt. Ferner enthält  $\chi(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ , wie in Abb. 3.4(a) dargestellt, sowohl den vollen als auch den nackten Geist-Gluon-Vertex. Wie bereits im Zusammenhang mit der Selbstenergie der Geister diskutiert, zeigen Untersuchungen im Rahmen der Landau-Eichung [47], daß der Effekt des „vertex dressings“ von untergeordneter Rolle ist.

Wir werden deshalb auch für den Krümmungstensor die „rainbow ladder“-Näherung verwenden und den vollen Geist-Gluon-Vertex  $\Gamma$  durch den nackten Vertex  $\Gamma^0$  ersetzen. Innerhalb dieser Näherung erhalten wir dann für den Krümmungstensor die Darstellung

$$\chi_{ij}^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{2} g^2 t_{im}(\mathbf{x}) t_{jn}(\mathbf{x}') \text{Tr} \left[ \hat{T}^a \left( \partial_m^x G_\omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \right) \hat{T}^b \left( \partial_n^{x'} G_\omega(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \right) \right], \quad (3.84)$$

<sup>4</sup>Die eigentliche dimensionslose Krümmung ist im Impulsraum durch  $\frac{\chi(k)}{\omega(k)}$  gegeben. Wie wir noch zeigen werden, verschwindet diese Krümmung  $\frac{\chi(k)}{\omega(k)}$  asymptotisch für  $k \rightarrow \infty$  und beschreibt damit einen flachen Konfigurationsraum im perturbativen Bereich. Trotzdem bezeichnen wir an dieser Stelle  $\chi$  weiterhin als Krümmung.

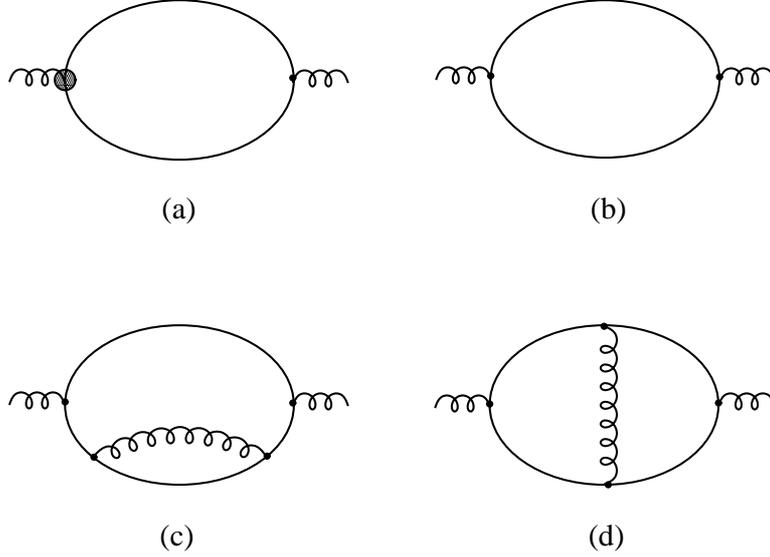


Abbildung 3.4: Diagrammatische Darstellung des Krümmungstensors, wobei die Linien den vollen Geistpropagator bezeichnen. (a) Voller Krümmungstensor  $\chi_{ij}^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  aus Gl. (3.82), (b) Krümmungstensor (3.84) nach der Ersetzung des vollen Geist-Gluon-Vertex  $\Gamma$  durch den nackten Vertex  $\Gamma^0$ , (c) Diese Korrekturen durch die Geistselbstenergie sind in den Diagrammen in (b) enthalten. (d) Diese Vertex-Korrekturen sind in den Diagrammen in (b) nicht enthalten. Allerdings sind diese Vertex-Korrekturen von zweiter oder höherer Schleifenordnung.

welche in Abb. 3.4(b) diagrammatisch dargestellt ist. Im Rahmen der „rainbow ladder“-Näherung ist der Geistpropagator  $G_\omega$  sowohl farbdagonal als auch translationsinvariant  $G_\omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = G_\omega(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ . Diese Eigenschaften übertragen sich somit auch auf den Krümmungstensor, und unter Verwendung von  $\text{tr}(\hat{T}^a \hat{T}^b) = -N_C \delta^{ab}$  folgt dann

$$\chi_{ij}^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \chi_{ij}^{ab}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \chi_{ij}^{ab}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \quad (3.85)$$

mit

$$\chi_{ij}^{ab}(\mathbf{k}) = \delta^{ab} \frac{N_C}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{d(\mathbf{q}) d(\mathbf{k} - \mathbf{q})}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} \frac{q_i q_j}{\mathbf{q}^2}. \quad (3.86)$$

Unter Ausnutzung der Isotropie im Impulsraum läßt sich für die Struktur des Krümmungstensors die folgende Relation beweisen

$$t_{in}(\mathbf{k}) \chi_{nj}^{ab}(\mathbf{k}) = \delta^{ab} t_{ij}(\mathbf{k}) \chi(\mathbf{k}). \quad (3.87)$$

Dabei ist die skalare Krümmung (3.83) im Impulsraum durch

$$\chi(\mathbf{k}) = \frac{N_C}{2(d-1)} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \left(1 - (\hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{q}})^2\right) \frac{d(\mathbf{k} - \mathbf{q}) d(\mathbf{q})}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} \equiv I_\chi(\mathbf{k}) \quad (3.88)$$

gegeben.

Als Vorbereitung für die Berechnung der Vakuumenergie im nächsten Abschnitt betrachten wir im folgenden die Größe  $\left\langle A_k^{\perp a}(\mathbf{x}') \frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta A_l^{\perp b}(\mathbf{x})} \right\rangle_\omega$ . Dieser Erwartungswert kann mit Hilfe des Wickschen Theorems in der Form (3.44) und der Verwendung der Relation (3.59) berechnet werden. Wir erhalten damit

$$\left\langle A_i^{\perp a}(\mathbf{x}') \frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta A_j^{\perp b}(\mathbf{x})} \right\rangle_\omega = \frac{1}{2} \int d^d x_1 t_{im}(\mathbf{x}') \omega^{-1}(\mathbf{x}', \mathbf{x}_1) \cdot \left\langle \frac{\delta^2 \ln \mathcal{J}}{\delta A_m^{\perp a}(\mathbf{x}_1) \delta A_j^{\perp b}(\mathbf{x})} \right\rangle_\omega. \quad (3.89)$$

Mit der Definition für den Krümmungstensor (3.81) können wir diese Größe in der Form

$$\left\langle A_i^{\perp a}(\mathbf{x}') \frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta A_j^{\perp b}(\mathbf{x})} \right\rangle_\omega = - \int d^d x_1 t_{im}(\mathbf{x}') \omega^{-1}(\mathbf{x}', \mathbf{x}_1) \chi_{mj}^{ab}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}) \quad (3.90)$$

schreiben.

### 3.3 Energiedichte des Yang-Mills-Vakuums

Mit den im letzten Abschnitt diskutierten Erwartungswerten sind wir jetzt in der Lage, die Berechnung der Energiedichte des Yang-Mills-Vakuums vorzunehmen. Basierend auf dem Gaußschen Wellenfunktional (3.34) läßt sich der Erwartungswert für den potentiellen Term des Hamiltonoperators relativ einfach berechnen. Mit Verwendung des Wickschen Theorems und den Definitionen für das Magnetfeld (3.8) bzw. (3.9) ergibt sich für die magnetische Energie (3.23)

$$\begin{aligned} E_p &= \left\langle \omega \left| \frac{1}{2} \int d^d x B(\mathbf{x})^2 \right| \omega \right\rangle = \left\langle \omega \left| \frac{1}{2} \int d^d k B(\mathbf{k}) B(-\mathbf{k}) \right| \omega \right\rangle \\ E_p &= \frac{N_C^2 - 1}{4} (d-1) \delta(\mathbf{0}) \int d^d k \frac{\mathbf{k}^2}{\omega(\mathbf{k})} \\ &\quad + \frac{N_C (N_C^2 - 1)}{16} g^2 \delta(\mathbf{0}) \int \frac{d^d k d^d k'}{(2\pi)^d} \frac{1}{\omega(\mathbf{k}) \omega(\mathbf{k}')} \left( (d^2 - 3d + 3) - (\hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{k}}')^2 \right). \end{aligned} \quad (3.91)$$

Die in diesem Ausdruck für die magnetische Energie  $E_p$  enthaltene divergente Konstante  $\delta(\mathbf{0})$  kann als das unendliche Volumen des Lorentzraumes identifiziert und durch den Übergang zur Energiedichte eliminiert werden. Aufgrund dessen ist die Energiedichte die eigentlich relevante Größe in der Quantenfeldtheorie.

Im Gegensatz zur magnetischen Energie ist die Berechnung der kinetischen Energie (3.22) und der Coulombenergie (3.24) deutlich komplizierter. Wir betrachten zunächst die Wirkung des Impulsoperators  $\tilde{\Pi}^\perp$  (3.28) auf das Wellenfunktional (3.34)

$$\tilde{\Pi}_i^{\perp a}(\mathbf{x}) \tilde{\Psi}[A^\perp] = \frac{1}{i} t_{ik}(\mathbf{x}) \left[ \frac{\delta}{\delta A_k^{\perp a}(\mathbf{x})} - \frac{1}{2} \frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta A_k^{\perp a}(\mathbf{x})} \right] \tilde{\Psi}[A^\perp] = i Q_i^a(\mathbf{x}) \tilde{\Psi}[A^\perp], \quad (3.92)$$

mit

$$\begin{aligned} Q_i^a(\mathbf{x}) &= \int d^d x_1 \omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) A_i^{\perp a}(\mathbf{x}_1) + \frac{1}{2} t_{ik}(\mathbf{x}) \frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta A_k^{\perp a}(\mathbf{x})} \\ &= \int d^d x_1 \omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) A_i^{\perp a}(\mathbf{x}_1) - \frac{1}{2} t_{ik}(\mathbf{x}) Tr \left( G \Gamma_k^{0,a}(\mathbf{x}) \right) \end{aligned} \quad (3.93)$$

bzw. nach der Fouriertransformation

$$Q_i^a(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}) A_i^{\perp a}(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \int d^d q \operatorname{tr} \left[ G(\mathbf{q}, \mathbf{k} - \mathbf{q}) \Gamma_i^{0,a}(\mathbf{q}, \mathbf{k}) \right]. \quad (3.94)$$

Mit dieser Größe  $Q$  erhalten wir für die Darstellung der kinetischen Energie (3.22)

$$E_k = \frac{1}{2} \int d^d x \langle Q_i^a(\mathbf{x}) Q_i^a(\mathbf{x}) \rangle_\omega \quad (3.95)$$

und völlig analog dazu für die Coulombenergie (3.24)

$$E_c = -\frac{g^2}{2} \int d^d x \int d^d x' \left\langle Q_i^c(\mathbf{x}) \hat{A}_i^{\perp ca}(\mathbf{x}) F^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', A^\perp) \hat{A}_j^{\perp bd}(\mathbf{x}') Q_j^d(\mathbf{x}') \right\rangle_\omega. \quad (3.96)$$

Der zweite Term in  $Q$  (3.93) enthält die Faddeev-Popov-Determinante  $\mathcal{J}[A^\perp]$  und repräsentiert somit die Krümmung des Konfigurationsraumes. Sowohl in der kinetischen Energie  $E_k$  als auch in der Coulombenergie  $E_c$  sind diese Krümmungsterme enthalten. Da die Faddeev-Popov-Determinante  $\mathcal{J}[A^\perp]$  und damit der Krümmungsterm in  $Q$  eine unendliche Reihe im Eichpotential  $A^\perp$  darstellt, können die Erwartungswerte für  $E_k$  und  $E_c$  nicht mehr exakt berechnet werden. Somit müssen wir an dieser Stelle für die praktische Berechnung eine Näherung zugrunde legen. Innerhalb der hier vorliegenden Arbeit beschränken wir uns für die Berechnung der Propagatoren auf das Einschleifenniveau und dementsprechend bei der Berechnung der Energiedichten auf das Zweischleifenniveau. Im Rahmen dieser Näherung finden wir für den Coulombterm die Faktorisierung

$$E_c = -\frac{g^2}{2} \int d^d x \int d^d x' \left\langle F^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', A^\perp) \right\rangle_\omega \left[ \left\langle \hat{A}_i^{\perp ca}(\mathbf{x}) \hat{A}_j^{\perp bd}(\mathbf{x}') \right\rangle_\omega \left\langle Q_i^c(\mathbf{x}) Q_j^d(\mathbf{x}') \right\rangle_\omega + \left\langle \hat{A}_j^{\perp bd}(\mathbf{x}') Q_i^c(\mathbf{x}) \right\rangle_\omega \left\langle \hat{A}_i^{\perp ca}(\mathbf{x}) Q_j^d(\mathbf{x}') \right\rangle_\omega \right], \quad (3.97)$$

wobei wir bereits

$$\langle A \rangle_\omega = 0, \quad \langle Q \rangle_\omega = 0 \quad (3.98)$$

benutzt haben. Ferner erfordert die Beschränkung auf das Zweischleifenniveau in der Energie eine spezielle Faktorisierung im Term  $\langle QQ \rangle_\omega$ . Dabei wird ein einzelnes  $A^\perp$  aus  $Q$  mit einem einzelnen  $A^\perp$  aus dem anderen  $Q$  kontrahiert. Die innerhalb eines  $Q$ -Terms verbleibenden Operatoren  $A^\perp$  werden dann lediglich untereinander kontrahiert und ergeben dadurch den Krümmungstensor (3.81).<sup>5</sup>

<sup>5</sup>Die Berechnung von  $\langle \frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta A} \frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta A} \rangle_\omega$  läßt sich folgendermaßen skizzieren:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta A} \frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta A} \right\rangle_\omega &= \sum_{n=1}^{\infty} \dots \left\langle A(1) \dots A(n) \frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta A} \right\rangle_\omega \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \dots \langle A(2) \dots A(n) \rangle_\omega \left\langle A(1) \frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta A} \right\rangle_\omega + \dots + \dots \langle A(1) \dots A(n-1) \rangle_\omega \left\langle A(n) \frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta A} \right\rangle_\omega \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \dots \langle A(1) \dots A(i-1) A(i+1) \dots A(n) \rangle_\omega \underbrace{\left\langle A(i) \frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta A} \right\rangle_\omega}_{\omega^{-1} \chi} \\ &= \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \dots \langle A(1) \dots A(i) A(i+1) \dots A(i+j) \rangle_\omega}_{\chi} \omega^{-1} \chi = \chi \omega^{-1} \chi \end{aligned}$$

Jede andere Faktorisierung führt auf Ausdrücke für die Energie, welche über das Zweischleifenniveau hinausgehen. Die hier beschriebene Faktorisierung garantiert uns insbesondere die Struktur einer quadratischen Form für den Term  $\langle QQ \rangle_\omega$  und erleichtert die Berechnung von  $\langle QQ \rangle_\omega$  in erheblichem Maße. Basierend auf der Berechnung des ersten Terms  $\sim \langle AA \rangle_\omega$  und des gemischten Terms  $\sim 2\langle A \frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta A} \rangle_\omega$  erhalten wir den verbleibenden, komplizierten Term  $\langle \frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta A} \frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta A} \rangle_\omega$  und damit letztlich  $\langle QQ \rangle_\omega$  durch eine quadratische Ergänzung. Unter Verwendung der Relation (3.90) zusammen mit der Definition (3.83) für die skalare Krümmung im Konfigurationsraum finden wir für den gemischten Term in  $\langle QQ \rangle_\omega$  die Form

$$\left\langle A_i^{\perp a}(\mathbf{x}) Q_j^b(\mathbf{x}') \right\rangle_\omega = \frac{1}{2} \delta^{ab} t_{ij}(\mathbf{x}) \left[ \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - \int d^d x_1 \omega^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) \chi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}') \right]. \quad (3.99)$$

Damit erhalten wir mit der oben diskutierten quadratischen Ergänzung für den Term  $\langle QQ \rangle_\omega$  den Ausdruck

$$\begin{aligned} \left\langle Q_i^a(\mathbf{x}) Q_j^b(\mathbf{x}') \right\rangle_\omega &= \frac{1}{2} \delta^{ab} \int d^d x_1 \int d^d x_2 [\omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) - \chi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1)] t_{ij}(\mathbf{x}_1) \\ &\quad \cdot \omega^{-1}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) [\omega(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}') - \chi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}')] . \end{aligned} \quad (3.100)$$

Mit diesem Ergebnis erhalten wir unter Verwendung von  $\delta^{aa} = N_C^2 - 1$  und  $t_{ii}(\mathbf{x}) = (d - 1)$  für die kinetische Energie (3.95)

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{(N_C^2 - 1)}{4} (d - 1) \int d^d x \int d^d x_1 \int d^d x_2 [\omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) - \chi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1)] \\ &\quad \cdot \omega^{-1}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) [\omega(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}) - \chi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x})] . \end{aligned} \quad (3.101)$$

Dieser Ausdruck kann im Impulsraum in der kompakten Form

$$E_k = \frac{N_C^2 - 1}{4} (d - 1) \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \int d^d k \frac{[\omega(\mathbf{k}) - \chi(\mathbf{k})]^2}{\omega(\mathbf{k})} \quad (3.102)$$

dargestellt werden. Die Behandlung der Coulombenergie  $E_c$  (3.97) erfolgt in völlig analoger Weise zur kinetischen Energie. Unter Verwendung der Relationen (3.99) und (3.100) für die Krümmungsterme und  $f^{abc} f^{abd} = N_C \delta^{cd}$  finden wir für die Coulombenergie (3.97)

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{N_C (N_C^2 - 1)}{8} g^2 \int d^d x \int d^d x' F_\omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \left[ [t_{ij}(\mathbf{x}) \omega^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')] \right. \\ &\quad \int d^d x_1 \int d^d x_2 [\omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) - \chi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1)] [t_{ji}(\mathbf{x}_1) \omega^{-1}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)] [\omega(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}') - \chi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}')] \\ &\quad \left. - \left( t_{ij}(\mathbf{x}) \left[ \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - \int d^d x_1 \omega^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) \chi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}') \right] \right) \right. \\ &\quad \left. \left( t_{ji}(\mathbf{x}') \left[ \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) - \int d^d x_2 \omega^{-1}(\mathbf{x}', \mathbf{x}_2) \chi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}) \right] \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Diese Energie kann ebenfalls im Impulsraum in der kompakten Form

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{N_C (N_C^2 - 1)}{16} \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \int \frac{d^d k d^d k'}{(2\pi)^d} \left( (d - 2) + (\hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{k}}')^2 \right) \frac{d(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 f(\mathbf{k} - \mathbf{k}')}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2} \\ &\quad \cdot \frac{\left( [\omega(\mathbf{k}) - \chi(\mathbf{k})] - [\omega(\mathbf{k}') - \chi(\mathbf{k}')] \right)^2}{\omega(\mathbf{k}) \omega(\mathbf{k}')} \end{aligned} \quad (3.104)$$

dargestellt werden. Mit derselben Begründung wie beim magnetischen Term (3.91) eliminieren wir durch den Übergang zur Energiedichte den divergenten Faktor  $\delta(\mathbf{0})$  in den Energien  $E_k$  (3.102) und  $E_c$  (3.104).

### 3.4 Minimierung der Vakuumenergiedichte

In diesem Abschnitt bestimmen wir die im Gaußschen Ansatz (3.34) enthaltene Variationsfunktion  $\omega(k)$ , indem wir basierend auf dem Variationsprinzip (3.18)

$$\frac{\delta E[\omega]}{\delta \omega} = \frac{\delta E_p[\omega]}{\delta \omega} + \frac{\delta E_k[\omega]}{\delta \omega} + \frac{\delta E_c[\omega]}{\delta \omega} = 0 \quad (3.105)$$

fordern. Die Variation der magnetischen Energie  $E_p$  (3.91) nach  $\omega(k)$  ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\delta E_p}{\delta \omega(\mathbf{k})} &= -\frac{N_C^2 - 1}{4} (d-1) \delta^{(d)}(\mathbf{0}) \frac{1}{\omega(\mathbf{k})^2} \\ &\cdot \left[ \mathbf{k}^2 + \frac{N_C}{2(d-1)} g^2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left( (d^2 - 3d + 3) - (\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{q}})^2 \right) \frac{1}{\omega(\mathbf{q})} \right]. \end{aligned} \quad (3.106)$$

Sowohl die kinetische Energie  $E_k$  (3.102) als auch die Coulombenergie  $E_c$  (3.104) enthalten neben der expliziten auch eine implizite Abhängigkeit von der Variationsfunktion  $\omega(k)$ , da der Geistformfaktor  $d(k)$ , der Coulombformfaktor  $f(k)$  und auch die Krümmung  $\chi(k)$  ihrerseits von  $\omega(k)$  abhängen. Es läßt sich zeigen, daß die Variationen der Funktionen  $d(k)$ ,  $f(k)$  und  $\chi(k)$  nach der Gluonenergie  $\omega(k)$  auf Terme von Zweischleifenniveau führen und somit im Rahmen der Einschleifennäherung vernachlässigt werden können. Dementsprechend erhalten wir für die Funktionalableitungen der kinetischen Energie  $E_k$  (3.102) und der Coulombenergie  $E_c$  (3.104) nach  $\omega(k)$

$$\frac{\delta E_k}{\delta \omega(\mathbf{k})} = \frac{N_C^2 - 1}{4} (d-1) \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \left[ 1 - \frac{\chi(\mathbf{k})^2}{\omega(\mathbf{k})^2} \right] \quad (3.107)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\delta E_c}{\delta \omega(\mathbf{k})} &= \frac{N_C(N_C^2 - 1)}{8} \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \frac{1}{\omega(\mathbf{k})^2} \cdot \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left( (d-2) + (\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{q}})^2 \right) \frac{d(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2 f(\mathbf{k}-\mathbf{q})}{(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2} \\ &\cdot \frac{\omega(\mathbf{k})^2 - [\omega(\mathbf{q}) - \chi(\mathbf{q}) + \chi(\mathbf{k})]^2}{\omega(\mathbf{q})}. \end{aligned} \quad (3.108)$$

Insgesamt folgt dann im Rahmen der Einschleifennäherung aus dem Variationsprinzip (3.105) die folgende Gluongleichung

$$\omega(\mathbf{k})^2 = \mathbf{k}^2 + \chi(\mathbf{k})^2 + I_\omega(\mathbf{k}) + I_\omega^0 \quad (3.109)$$

mit den Integralen

$$I_\omega^0 = \frac{N_C}{2(d-1)} g^2 \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \left( (d^2 - 3d + 3) - (\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{q}})^2 \right) \frac{1}{\omega(\mathbf{q})} \quad (3.110)$$

$$\begin{aligned} I_\omega(\mathbf{k}) &= \frac{N_C}{2(d-1)} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \left( (d-2) + (\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{q}})^2 \right) \cdot \frac{d(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2 f(\mathbf{k}-\mathbf{q})}{(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2} \\ &\cdot \frac{[\omega(\mathbf{q}) - \chi(\mathbf{q}) + \chi(\mathbf{k})]^2 - \omega(\mathbf{k})^2}{\omega(\mathbf{q})}. \end{aligned} \quad (3.111)$$

Zusammen mit dieser Gleichung (3.109) für die Gluonenergie  $\omega(k)$  bilden die Gleichungen für den Geistpropagator  $d(k)$  (3.69)

$$\frac{1}{d(\mathbf{k})} = \frac{1}{g} - \frac{N_C}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \left(1 - (\hat{\mathbf{k}\hat{\mathbf{q}}})^2\right) \frac{d(\mathbf{k} - \mathbf{q})}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 \omega(\mathbf{q})} = \frac{1}{g} - I_d(\mathbf{k}), \quad (3.112)$$

für den Coulombfaktor  $f(k)$  (3.76)

$$f(\mathbf{k}) = 1 + \frac{N_C}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \left(1 - (\hat{\mathbf{k}\hat{\mathbf{q}}})^2\right) \frac{d(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 f(\mathbf{k} - \mathbf{q})}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 \omega(\mathbf{q})} = 1 + I_f(\mathbf{k}) \quad (3.113)$$

und die skalare Krümmung  $\chi(k)$  (3.88) des Konfigurationsraumes

$$\chi(\mathbf{k}) = \frac{N_C}{2(d-1)} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left(1 - (\hat{\mathbf{k}\hat{\mathbf{q}}})^2\right) \frac{d(\mathbf{k} - \mathbf{q})d(\mathbf{q})}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} = I_\chi(\mathbf{k}) \quad (3.114)$$

ein gekoppeltes System nichtlinearer Schwinger-Dyson-Integralgleichungen in  $d = 2, 3$  Dimensionen. Während die theoretische Ableitung dieser Integralgleichungen in  $d = 2$  bzw.  $d = 3$  Dimensionen völlig analog verläuft, unterscheiden sich die Diskussionen der Renormierung wie auch die Lösungseigenschaften im infraroten und ultravioletten Grenzfall erheblich voneinander – ebenso die Ergebnisse der vollen numerischen Lösungen. Wie werden deshalb zunächst den  $d = 3$  dimensionalen Fall behandeln und anschließend die Untersuchung der Gleichungen für  $d = 2$  vornehmen.

## 3.5 Yang-Mills-Theorie in $D = 3 + 1$ Dimensionen

### 3.5.1 Asymptotisches Verhalten

Um erste Einblicke in das infrarote und ultraviolette Verhalten der Lösungen des gekoppelten Integralgleichungssystems zu erhalten, untersuchen wir diese Gleichungen im Rahmen der sogenannten Winkelnäherung. Innerhalb dieser Näherung wird eine Funktion  $h(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|)$ , welche im Impulsintegral einer Integralgleichung von der Differenz zwischen äußerem Impuls  $\mathbf{k}$  und innerem Integrationsimpuls  $\mathbf{q}$  abhängt, durch den Ausdruck

$$h(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) \simeq h(k)\Theta(k - q) + h(q)\Theta(q - k) \quad (3.115)$$

ersetzt. Obwohl wir an dieser Stelle wenig über die Genauigkeit dieser Winkelnäherung (3.115) aussagen können, zeigen die vollen numerischen Berechnungen im Abschnitt 3.5.3, welche nicht auf dieser Näherung beruhen, nahezu dasselbe asymptotische Verhalten wie die hier vorliegende analytische Berechnung mit Hilfe der Winkelnäherung.

Basierend auf dieser Winkelnäherung (3.115) erhalten wir für die Winkelintegrale in den Schwinger-Dyson-Integralgleichungen für den Geistformfaktor  $d(k)$  (3.112) und die Krümmung  $\chi(k)$  (3.114) die folgende Näherung

$$\begin{aligned} \int_0^\pi d\vartheta \sin^3 \vartheta \frac{d(\mathbf{k} - \mathbf{q})}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} &\simeq \left[ \Theta(k - q) \frac{d(k)}{k^2} + \Theta(q - k) \frac{d(q)}{q^2} \right] \cdot \int_0^\pi d\vartheta \sin^3 \vartheta \\ &= \frac{4}{3} \left[ \Theta(k - q) \frac{d(k)}{k^2} + \Theta(q - k) \frac{d(q)}{q^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.116)$$

Unter Benutzung dieser Relation für die Winkelintegrale finden wir für die verbleibenden Impulsintegrale in den Schwinger-Dyson-Integralgleichungen

$$I_d(k) = \frac{N_C}{6\pi^2} \left[ \frac{d(k)}{k^2} \int_0^k dq \frac{q^2}{\omega(q)} + \int_k^\Lambda dq \frac{d(q)}{\omega(q)} \right], \quad (3.117)$$

$$I_\chi(k) = \frac{N_C}{12\pi^2} \left[ \frac{d(k)}{k^2} \int_0^k dq q^2 d(q) + \int_k^\Lambda dq d(q)^2 \right]. \quad (3.118)$$

Eine elegante Methode zur Untersuchung der Lösungen im asymptotischen Bereich dieser Integralgleichungen besteht in der Differenzierung nach dem äußeren Impuls. Diese Differentiation der beiden Integrale (3.117) und (3.118) nach dem äußeren Impuls  $k$  ergibt

$$I'_d(k) = \frac{N_C}{6\pi^2} \frac{1}{k^2} \left[ d'(k) - 2 \frac{d(k)}{k} \right] \int_0^k dq \frac{q^2}{\omega(q)} \quad (3.119)$$

$$I'_\chi(k) = \frac{N_C}{12\pi^2} \frac{1}{k^2} \left[ d'(k) - 2 \frac{d(k)}{k} \right] \int_0^k dq q^2 d(q). \quad (3.120)$$

Bemerkenswerterweise sind die in diesen Ableitungen auftretenden Integrale alle ultraviolett endlich. Die Differentiation der Schwinger-Dyson-Gleichungen (3.112) für den Geistformfaktor  $d(k)$  nach dem äußeren Impuls  $k$  liefert zusammen mit der Gleichung (3.119)

$$d'(k) \left[ \frac{1}{d(k)^2} - \frac{N_C}{6\pi^2} \frac{R(k)}{k^2} \right] = - \frac{N_C}{3\pi^2} \frac{R(k)}{k^2} \frac{d(k)}{k}, \quad (3.121)$$

mit dem Integral

$$R(k) = \int_0^k dq \frac{q^2}{\omega(q)}. \quad (3.122)$$

Die Gleichung (3.114) für die Krümmung  $\chi(k)$  wird in derselben Weise nach dem äußeren Impuls  $k$  differenziert und liefert mit Gleichung (3.120)

$$\chi'(k) = \frac{N_C}{12\pi^2} \frac{1}{k^2} \left[ d'(k) - 2 \frac{d(k)}{k} \right] S(k), \quad (3.123)$$

mit

$$S(k) = \int_0^k dq q^2 d(q). \quad (3.124)$$

Im folgenden werden wir basierend auf diesen Gleichungen (3.121) und (3.123) den ultravioletten ( $k \rightarrow \infty$ ) und infraroten Grenzfall ( $k \rightarrow 0$ ) getrennt voneinander diskutieren.

### Ultraviolettes Verhalten

Aufgrund der asymptotischen Freiheit muß die Gluonenergie  $\omega(k)$  für  $k \rightarrow \infty$  das folgende asymptotische Verhalten aufweisen

$$\omega(k) \rightarrow \sqrt{\mathbf{k}^2}, \quad k \rightarrow \infty. \quad (3.125)$$

Dasselbe Verhalten erhalten wir im Rahmen der numerischen Behandlung der Gluungleichung (3.109) im Abschnitt 3.5.3. Wir konzentrieren uns in diesem Abschnitt auf das asymptotische Verhalten des Geistformfaktors  $d(k)$ , der skalaren Krümmung  $\chi(k)$  und des Coulombformfaktors  $f(k)$  unter Verwendung der Winkelnäherung.

Die Schwinger-Dyson-Gleichung (3.121) für den Geistformfaktor enthält das noch unbekannte Integral  $R(k)$  (3.122). Für große äußere Impulse  $k$  läßt sich leicht zeigen, daß die dominanten Beiträge zum Integral  $R(k)$  aus den Bereichen mit großen inneren Impulsen  $q$  kommen. Aufgrund dessen ist es gerechtfertigt, im Integral  $R(k)$  für  $\omega(q)$  das asymptotische Verhalten, also  $\omega(q) = \sqrt{\mathbf{q}^2}$ , einzusetzen. Wir erhalten damit

$$R(k) = \frac{k^2}{2} \quad k \rightarrow \infty, \quad (3.126)$$

und für die Schwinger-Dyson-Gleichung (3.121) des Geistformfaktors im Bereich großer äußerer Impulse  $k$

$$d'(k) \left[ \frac{1}{d(k)^3} - \frac{N_C}{12\pi^2} \frac{1}{d(k)} \right] = -\frac{N_C}{6\pi^2} \frac{1}{k}. \quad (3.127)$$

Die Integration dieser gewöhnlichen Differentialgleichung führt auf die Lösung

$$\left( \frac{1}{d(k)} \right)^2 = \left( \frac{1}{d(\mu)} \right)^2 + \frac{N_C}{6\pi^2} \left( \ln \frac{k^2}{\mu^2} - \ln \frac{d(k)}{d(\mu)} \right), \quad (3.128)$$

in der  $\mu$  ein beliebiger Impuls ist. Wir erwarten für große äußere Impulse  $k$ , daß die Bedingung

$$\frac{d(k)}{d(\mu)} \ll \frac{k^2}{\mu^2} \quad k \rightarrow \infty \quad (3.129)$$

erfüllt ist, da für  $k \rightarrow \infty$  die Faddeev-Popov-Determinante in die Determinante des Laplaceoperators übergeht und damit der Geistformfaktor gegen eins gehen sollte ( $d(k \rightarrow \infty) \rightarrow 1$ ). Aufgrund der dimensionellen Transmutation ist jedoch das Auftreten einer anomalen Dimension für das ultraviolette Verhalten von  $d(k)$  zu erwarten. In der Tat zeigt die weitere Behandlung, daß  $d(k)$  das asymptotische Verhalten  $d(k) \sim (\ln k^2/\mu^2)^{-\frac{1}{2}}$  mit einer anomalen Dimension von  $\frac{1}{2}$  aufweist und insbesondere die Bedingung (3.129) erfüllt. Ausgehend von diesen Überlegungen nehmen wir zunächst die Gültigkeit der Relation (3.129) an und zeigen anschließend anhand der resultierenden Lösung für  $d(k)$  die Rechtfertigung dieser Annahme. Aufgrund der Relation (3.129) können wir in Gleichung (3.128) den letzten Term vernachlässigen und erhalten damit die explizite Lösung

$$d(k) = \frac{d(\mu)}{\sqrt{1 + \frac{N_C}{6\pi^2} d(\mu)^2 \ln \left( \frac{k^2}{\mu^2} \right)}} \quad k \rightarrow \infty \quad (3.130)$$

mit dem asymptotischen Verhalten

$$d(k) = \pi \sqrt{\frac{6}{N_C}} \left( \ln \frac{k^2}{\mu^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.131)$$

für große Impulse  $k$ , welches unsere Annahme (3.129) rechtfertigt. Im Rahmen der Diskussion zur Renormierung (Abschnitt 3.5.2) zeigen wir, daß das asymptotische Verhalten von  $d(k)$  für  $k \rightarrow \infty$  mit dem der renormierten Kopplungskonstanten  $g \sim \sqrt{\alpha}$  übereinstimmt. Somit entspricht nach Gl. (3.66) das Verhalten der Geistteilchen im Grenzfall  $k \rightarrow \infty$  dem eines freien Teilchens.

Basierend auf dem asymptotischen Verhalten des Geistformfaktors (3.130) können wir unmittelbar durch Verwendung der Swift-Relation (3.75) das asymptotische Verhalten des Coulombformfaktors berechnen. Damit erhalten wir für  $f(k)$

$$f(k) = f(\mu) \frac{d(k)}{d(\mu)} \quad k \rightarrow \infty . \quad (3.132)$$

Dies ist bis auf die unterschiedliche numerische Konstante  $f(\mu)/d(\mu)$  dasselbe asymptotische Verhalten wie für den Geistformfaktor  $d(k)$ .

Im Gegensatz zur Berechnung des asymptotischen Verhaltens von  $d(k)$  und  $f(k)$  ist die Behandlung der Krümmung komplizierter. Für große Impulse  $k$  benutzen wir die asymptotische Form (3.131) des Geistformfaktors  $d(k)$ , aus der

$$d'(k) = -\frac{N_C}{6\pi^2} \frac{1}{k} d(k)^3 \quad (3.133)$$

folgt und erhalten dann für die Krümmung aus Gl. (3.123)

$$\chi'(k) = -\frac{N_C}{6\pi^2} \frac{d(k)}{k^3} \left[ 1 + \frac{N_C}{12\pi^2} d(k)^2 \right] S(k) . \quad (3.134)$$

Der Geistformfaktor  $d(k)$  ist definitionsgemäß positiv, da lediglich Eichkonfigurationen erlaubt sind, welche sich in der ersten Gribovregion befinden. Aufgrund dessen ist das Integral  $S(k)$  (3.124) ebenfalls positiv, und damit gilt  $\chi'(k) \leq 0$ . Für sehr große Impulse  $k$  können wir die asymptotische Form (3.131) von  $d(k)$  benutzen, so daß der Integrand von  $S(k)$  gegen  $q^2/\sqrt{\ln q/\mu}$  strebt. Ferner werden wir später zeigen, daß  $k^2 d(k)$  für  $k \rightarrow 0$  gegen Null strebt ( $k^2 d(k) \rightarrow 0$ ) und ansonsten eine streng monoton wachsende Funktion ist. Damit gilt für genügend große Impulse  $k$  die folgende Ungleichung für  $S(k)$

$$S(k) \leq \int_0^k dq q^2 = \frac{1}{3} k^3 , \quad (3.135)$$

und somit unter Verwendung von Gl. (3.134) die Abschätzung

$$0 > \chi'(k) \gtrsim -\frac{N_C}{18\pi^2} d(k) \left[ 1 + \frac{N_C}{12\pi^2} d(k)^2 \right] . \quad (3.136)$$

Aufgrund des asymptotischen Verhaltens  $d(k) \sim 1/\sqrt{\ln k/\mu}$  für  $k \rightarrow \infty$  können wir in dieser Ungleichung den zweiten Term in der Klammer gegenüber der Eins vernachlässigen oder

aber mit einem Faktor  $-2$  multiplizieren, ohne das asymptotische Verhalten von  $\chi(k)$  zu verändern. Unter Verwendung der Relation (3.133) finden wir

$$d(k) \left[ 1 - 2 \frac{N_C}{12\pi^2} d(k)^2 \right] = \frac{d}{dk} [kd(k)] \quad (3.137)$$

und erhalten für das asymptotische Verhalten der Krümmung die Abschätzung

$$0 > \chi'(k) \gtrsim -\frac{N_C}{18\pi^2} \frac{d}{dk} [kd(k)] . \quad (3.138)$$

Die Integration dieser Ungleichung im Intervall  $[k_0, k]$  ergibt

$$0 > \chi(k) - \chi(k_0) \gtrsim -\frac{N_C}{9\pi^2} [kd(k) - k_0d(k_0)] \quad (3.139)$$

und führt auf das asymptotische Verhalten

$$0 > \frac{\chi(k)}{k} \gtrsim -\frac{N_C}{18\pi^2} d(k) \quad k \rightarrow \infty \quad (3.140)$$

bzw. mit der Gl. (3.131) auf

$$\chi(k) \sim \frac{k}{\sqrt{\ln k/\mu}} \quad k \rightarrow \infty . \quad (3.141)$$

Insbesondere besitzt damit das Verhältnis zwischen skalarer Krümmung und der Gluonenergie  $\omega(k)$  das asymptotische Verhalten:

$$\frac{\chi(k)}{\omega(k)} \sim \frac{\chi(k)}{k} \sim \frac{1}{\sqrt{\ln k/\mu}} \rightarrow 0 \quad k \rightarrow \infty . \quad (3.142)$$

Zusammenfassend ergibt sich also für die Gluonenergie, den Geist- und Coulombformfaktor sowie die skalare Krümmung im ultravioletten Grenzfall ( $k \rightarrow \infty$ ) das folgende asymptotische Verhalten

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{k}) &\sim \sqrt{\mathbf{k}^2} \\ d(\mathbf{k}) &\sim \frac{1}{\sqrt{\ln k/\mu}}, \quad f(\mathbf{k}) \sim \frac{1}{\sqrt{\ln k/\mu}} \\ \frac{\chi(\mathbf{k})}{\omega(\mathbf{k})} &\sim \frac{1}{\sqrt{\ln k/\mu}} . \end{aligned} \quad (3.143)$$

Die erste Gleichung repräsentiert die asymptotische Freiheit der Gluonen, welche sich bei hohen Energien  $\omega(k) \sim k$  wie freie Teilchen verhalten. In der letzten Gleichung kommt die Tatsache zum Ausdruck, daß der gekrümmte Konfigurationsraum der Eichpotentiale  $A^\perp$  für hohe Impulse  $k$  in einen flachen Raum übergeht. Das Verhalten der Geistteilchen, repräsentiert durch den Geistformfaktor  $d(k)$ , unterscheidet sich asymptotisch von dem eines freien Teilchens durch die anomale Dimension  $1/\sqrt{\ln k/\mu}$ . Damit stehen diese Relationen in Übereinstimmung mit der asymptotischen Freiheit.

### Infrarotes Verhalten

In diesem Abschnitt untersuchen wir das Verhalten der Lösungen der gekoppelten Schwinger-Dyson-Gleichungen im infraroten Grenzfall, also für  $k \rightarrow 0$ . Dabei benutzen wir ebenfalls die Winkelnäherung (3.115) und verwenden für die relevanten Größen im Grenzfall  $k \rightarrow 0$  die Ansätze

$$\omega(k) = \frac{A}{k^\alpha}, \quad d(k) = \frac{B}{k^\beta}, \quad \chi(k) = \frac{C}{k^\gamma} \quad \text{für} \quad k \rightarrow 0. \quad (3.144)$$

Basierend auf diesen Ansätzen können wir für den infraroten Grenzfall  $k \rightarrow 0$  die gekoppelten Schwinger-Dyson-Gleichungen für den Geistformfaktor (3.121) und die Krümmung (3.123) lösen. In den verbleibenden Integralen (3.122) und (3.124) sind die Integrationen auf das Intervall  $[0, k]$  eingeschränkt und können deshalb für den Grenzfall  $k \rightarrow 0$  mit den hier zugrundeliegenden Ansätzen (3.144) berechnet werden. Wir erhalten

$$\begin{aligned} R(k) &= \frac{1}{A} \int_0^k dq q^{\alpha+2} = \frac{1}{A} \frac{k^{\alpha+3}}{\alpha+3}, \\ S(k) &= B \int_0^k dq q^{2-\beta} = B \frac{k^{3-\beta}}{3-\beta} \end{aligned} \quad (3.145)$$

und damit für die Integrale (3.119) und (3.120)

$$I'_d(k) = -\frac{N_C}{6\pi^2} \frac{B}{A} \cdot \frac{\beta+2}{\alpha+3} k^{\alpha-\beta}, \quad (3.146)$$

$$I'_\chi(k) = -\frac{N_C}{12\pi^2} B^2 \frac{\beta+2}{3-\beta} k^{-2\beta}. \quad (3.147)$$

Die Ableitung der Geistgleichung (3.112) nach dem äußeren Impuls  $k$

$$\frac{d'(k)}{d(k)^2} = I'_d(k) \quad (3.148)$$

liefert dann zusammen mit (3.144) die Relation

$$\frac{A}{B^2} = \frac{N_C}{6\pi^2} \frac{\beta+2}{\beta(\alpha+3)} k^{\alpha-2\beta+1}. \quad (3.149)$$

Da die linke Seite dieser Gleichung unabhängig von  $k$  ist, folgt daraus sofort ein Zusammenhang zwischen den Infrarotexponenten der Gluonen und der Geister

$$\alpha = 2\beta - 1. \quad (3.150)$$

Das Einsetzen dieser Relation in (3.149) liefert dann einen Zusammenhang zwischen den Koeffizienten  $A$  und  $B$

$$\frac{A}{B^2} = \frac{N_C}{6\pi^2} \frac{\beta+2}{2\beta(\beta+1)}. \quad (3.151)$$

Auf analoge Weise finden wir, ausgehend von der Ableitung der Krümmungsgleichung (3.114) nach dem äußeren Impuls  $k$

$$\chi'(k) = I'_\alpha(k), \quad (3.152)$$

die Relation

$$\frac{C}{B^2} = \frac{N_C}{12\pi^2} \frac{\beta + 2}{\gamma(3 - \beta)} k^{\gamma - 2\beta + 1} \quad (3.153)$$

und damit insbesondere die Zusammenhänge

$$\gamma = 2\beta - 1 \quad (3.154)$$

für die Infrarotexponenten  $\gamma$  und  $\beta$ , sowie

$$\frac{C}{B^2} = \frac{N_C}{12\pi^2} \frac{\beta + 2}{(2\beta - 1)(3 - \beta)} \quad (3.155)$$

für die Koeffizienten  $C$  und  $B$ . Insgesamt besteht aufgrund der Relationen (3.150) und (3.154) der folgende Zusammenhang zwischen den Infrarotexponenten

$$\alpha = \gamma = 2\beta - 1. \quad (3.156)$$

Damit besitzen insbesondere die Gluonen mit  $\omega(k)$  und die Krümmung  $\chi(k)$  dasselbe infrarote Verhalten. Die Kombination der Gleichungen (3.151) und (3.155) erlaubt die Elimination der Konstanten  $B$  und führt auf den Zusammenhang

$$\frac{A}{C} = \frac{(2\beta - 1)(3 - \beta)}{\beta(\beta + 1)} \quad (3.157)$$

zwischen  $A$  und  $C$ . Unglücklicherweise kann die Gluengleichung (3.109) nicht in derselben Weise behandelt werden, da der Integrand des verbleibenden Impulsintegrals  $I_\omega(k)$  (3.111) nach der Berechnung des Winkelintegrals mit der bereits diskutierten Winkelnäherung (3.115) noch eine explizite Abhängigkeit vom äußeren Impuls  $k$  besitzt und damit die Ableitung  $I'_\omega(k)$  nach  $k$  zu einem deutlich komplizierteren Ausdruck führt, als dies bei  $I'_d(k)$  (3.119) und  $I'_\chi(k)$  (3.120) der Fall ist. Trotzdem läßt sich mit der Gluengleichung (3.109) ohne die Verwendung der Winkelnäherung zeigen, daß im infraroten Grenzfall  $k \rightarrow 0$  die Gluonenergie  $\omega(k)$  gegen  $\chi(k)$  strebt und somit neben den Infrarotexponenten  $\alpha$  und  $\gamma$  (3.156) auch die Infrarotkoeffizienten  $A$  und  $C$  übereinstimmen

$$A = C. \quad (3.158)$$

Für den Beweis dieser Aussage betrachten wir die Gluengleichung (3.109) im infraroten Grenzfall  $k \rightarrow 0$  und gehen an dieser Stelle von regularisierten Integralen innerhalb der Gluengleichung aus. Durch die Renormierung der Gluengleichung im nächsten Abschnitt werden die ultravioletten Divergenzen in den beiden Integralen (3.110), (3.111) der Gluengleichung eliminiert und endliche Renormierungskonstanten eingeführt, welche jedoch im infraroten Grenzfall  $k \rightarrow 0$  im Vergleich zu den divergenten Funktionen  $\omega(k)$  und  $\chi(k)$  unbedeutend sind. Deshalb erhalten wir, unter Vernachlässigung endlicher Terme im Infraroten, die folgende Gluengleichung für  $k \rightarrow 0$

$$\omega^2(k \rightarrow 0) = \chi^2(k \rightarrow 0) + I_\omega(k \rightarrow 0). \quad (3.159)$$

Da das Gluonintegral  $I_\omega(k)$  (3.111) ultraviolett divergent ist, kommen die wesentlichen Beiträge zum Integral aus Bereichen mit großem Integrationsimpuls  $q$ . Für größere Integrationsimpulse  $q$  und gegen Null strebende äußere Impulse  $k \rightarrow 0$  können wir im Integrand von  $I_\omega(k)$  sowohl  $\omega(q)$  als auch  $\chi(q)$  im Vergleich zu den divergenten Größen  $\omega(k \rightarrow 0)$  und  $\chi(k \rightarrow 0)$  vernachlässigen und erhalten damit

$$I_\omega(k \rightarrow 0) = [\chi^2(k) - \omega^2(k)] \cdot \frac{N_C}{4} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{d^2(\mathbf{k} - \mathbf{q}) f(\mathbf{k} - \mathbf{q})}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 \omega(q)}. \quad (3.160)$$

Unter Verwendung des ultravioletten Verhaltens der Lösungen (3.143) sehen wir, daß dieses verbleibende Integral ultraviolett endlich ist

$$\int dq \frac{d^2(q) f(q)}{\omega(q)} \sim \int dq \frac{1}{q(\ln q/\mu)^{\frac{3}{2}}} = -2 \int dq \frac{d}{dq} \frac{1}{(\ln q/\mu)^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.161)$$

Basierend auf dem divergenten Verhalten der Gluonenergie  $\omega(k)$  und der Krümmung  $\chi(k)$  im Grenzfall  $k \rightarrow 0$  folgt aus den Gleichungen (3.159) und (3.160) die Relation

$$\omega(k \rightarrow 0) = \chi(k \rightarrow 0). \quad (3.162)$$

Im Rahmen der im Abschnitt 3.5.3 zu diskutierenden vollen numerischen Lösungen finden wir ebenfalls diesen zentralen Zusammenhang (3.162) zwischen  $\omega(k)$  und  $\chi(k)$ . Damit folgt insbesondere aus den Gl. (3.157) und (3.158)  $\beta = 1$  und ferner mit Gl. (3.156)  $\alpha = \gamma = 1$ . Insgesamt erhalten wir also das folgende Lösungsverhalten im infraroten Grenzfall  $k \rightarrow 0$

$$\omega(k) = \chi(k) = \frac{A}{k} \quad (3.163)$$

$$d(k) = \sqrt{\frac{8\pi^2 A}{N_C}} \cdot \frac{1}{k}. \quad (3.164)$$

An dieser Stelle ist zu bemerken, daß das hier vorliegende infrarote Verhalten für den Geistformfaktor  $d(k) \sim \frac{1}{k}$  zu einem exakt linear ansteigenden Potential zweier Farbladungen bei großen Abständen führt, wenn wir für das infrarote Verhalten der Coulombformfunktion  $f(k)$  (3.113) den führenden Term  $f(k \rightarrow 0) = 1$  zugrunde legen.

### 3.5.2 Renormierung der Schwinger-Dyson-Integralgleichungen

Die Integrale der Schwinger-Dyson-Integralgleichungen (3.109), (3.112), (3.113) und (3.114) enthalten ultraviolett divergente Integrale und erfordern deshalb eine Regularisierung und Renormierung. Die Renormierung der Schwinger-Dyson-Gleichungen in der Coulombbeichung wurde bereits in der Arbeit [20] diskutiert. Allerdings unterscheiden sich die hier vorliegenden Integralgleichungen von denen in [20] durch die Berücksichtigung der Krümmung  $\chi$  im Konfigurationsraum und führen deshalb auf ein komplizierteres Renormierungsschema.

In der folgenden Diskussion der Renormierung benutzen wir der Einfachheit halber einen „Impuls-Cutoff“<sup>6</sup>  $\Lambda$  als Regulator der ultraviolett divergenten Integrale. Wir sind uns dabei der Tatsache bewußt, daß diese Art der Regularisierung die Eichinvarianz verletzen kann

<sup>6</sup>Wir bezeichnen diese obere Schranke  $\Lambda$  bei den Impulsintegralen im folgenden wie üblich als „Cutoff“.

und dadurch möglicherweise spuriose Divergenzen auftreten. Andererseits verursacht die Beschränkung auf das Zweischleifenniveau in der Coulombenergie ebenfalls spuriose, ultraviolette Divergenzen. Der entscheidende Punkt in diesem Zusammenhang ist jedoch, daß weder das infrarote noch das ultraviolette Verhalten der interessierenden Größen, welche durch die Schwinger-Dyson-Gleichungen bestimmt werden, von der speziellen Art der Regularisierung bzw. Renormierung abhängen.

Durch die Einführung eines „Impuls-Cutoffs“  $\Lambda$  werden die Integrale der Schwinger-Dyson-Gleichungen vom Cutoff  $\Lambda$  abhängig. Wir betrachten zunächst die Integralgleichung (3.112)

$$\frac{1}{d(k, \Lambda)} = \frac{1}{g} - I_d(k, \Lambda) \quad (3.165)$$

mit

$$I_d(k, \Lambda) = \frac{N_C}{2} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left(1 - (\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{q}})^2\right) \frac{d(\mathbf{k} - \mathbf{q})}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 \omega(\mathbf{q})} \quad (3.166)$$

für den Geistformfaktor  $d(k, \Lambda)$ , welcher nun vom Cutoff  $\Lambda$  abhängt. Andererseits kann der Formfaktor  $d(k, \Lambda)$  nur dann eine physikalische Bedeutung haben, wenn er unabhängig vom Cutoff  $\Lambda$  ist.<sup>7</sup> Dies wird üblicherweise realisiert, indem die Kopplungskonstante  $g(\Lambda)$  Cutoff-abhängig wird und die aus der Gleichung (3.165) resultierende Bedingung

$$\frac{d}{d\Lambda} \frac{1}{d(k, \Lambda)} = -\frac{1}{g(\Lambda)^2} \frac{dg(\Lambda)}{d\Lambda} - \frac{d}{d\Lambda} I_d(k, \Lambda) = 0 \quad (3.167)$$

erfüllt, so daß damit tatsächlich  $d(k, \Lambda)$  unabhängig von  $\Lambda$  ist. Im Grenzfall  $\Lambda \rightarrow \infty$  können wir die Abhängigkeit von  $\omega(q)$  und  $d(q)$  im Integral  $I_d$  (3.166) vernachlässigen und erhalten damit den Ausdruck

$$\left. \frac{dI_d(k, \Lambda)}{d\Lambda} \right|_{\Lambda \rightarrow \infty} = \frac{N_C}{3} \frac{1}{2\pi^2} \frac{d(k = \Lambda, \Lambda)}{\omega(k = \Lambda, \Lambda)}, \quad (3.168)$$

welcher unabhängig vom äußeren Impuls  $k$  ist. Da  $\omega(k)$  aufgrund der Normierbarkeit des Wellenfunktionals (3.34) positiv sein muß und auch  $d(k)$  innerhalb des ersten Gribov-Horizontes positiv ist, hat der Ausdruck  $\frac{dI_d}{d\Lambda}$  ebenfalls positives Vorzeichen, und damit verschwindet die Lösung  $g(\Lambda)$  von Gl. (3.167) asymptotisch für  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Ferner bleibt das Integral  $I_d(k = \Lambda, \Lambda)$  (3.166), wie auch in der Winkelnäherung (3.117) zu ersehen ist, im Grenzfall  $\Lambda \rightarrow \infty$  endlich und strebt gegen Null. Damit besitzen also  $d(k = \Lambda, \Lambda)$  und  $g(\Lambda)$  nach der Gl. (3.165) dasselbe asymptotische Verhalten im Grenzfall  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Zusammen mit dem asymptotischen Verhalten  $\omega(k \rightarrow \infty) \sim k$  erhalten wir somit aus der Gl. (3.168)

$$\Lambda \frac{dg}{d\Lambda} = -\beta g^3, \quad \beta = \frac{\beta_0}{(4\pi)^2}, \quad \beta_0 = \frac{8N_C}{3}. \quad (3.169)$$

Die Diskussionen in [20] zeigen, daß dieser Wert nicht mit dem störungstheoretischen Wert von  $\beta_0 = 11 N_C/3$  vergleichbar ist. In der vorliegenden Behandlung der Yang-Mills-Theorie kann

<sup>7</sup>Im Rahmen der Näherung  $f(k) = 1$  ist das statische Potential zwischen zwei Quarks durch den Ausdruck  $V = \frac{g^2}{2} G(-\partial^2) G = \frac{g^2}{2} \frac{d}{g} \frac{1}{-\partial^2} \frac{d}{g} = \frac{1}{2} d(-\partial^2) d$  gegeben. Da dieses Quarkpotential eine Renormierungsgruppeninvariante darstellt, ist  $d(k)$  ebenfalls renormierungsgruppeninvariant.

die laufende Kopplungskonstante aus dem Coulombterm bestimmt werden. Dies führt auf den Wert  $\beta_0 = 12 N_C/3$  anstelle von  $\beta_0 = 11 N_C/3$ . Diese Abweichung ist auf die Abwesenheit der Emission und Absorption transversaler Gluonen bei der Bildung des Erwartungswertes des Hamiltonoperators zurückzuführen.

Die Gl. (3.169) hat die bekannte Lösung

$$g^2(\Lambda) = \frac{g^2(\mu)}{1 + \beta g^2(\mu) \ln \left( \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right)} \quad (3.170)$$

und zeigt für den Grenzfall  $\Lambda \rightarrow \infty$  in Übereinstimmung mit der asymptotischen Freiheit das Verhalten

$$g^2(\Lambda) = \frac{1}{\beta \ln \left( \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right)} \quad (3.171)$$

für  $g(\Lambda)$ . Dasselbe asymptotische Verhalten haben wir bereits in Gl. (3.131) für den Geistformfaktor  $d(k = \Lambda \rightarrow \infty)$  erhalten, und damit sehen wir an dieser Stelle explizit die Übereinstimmung des asymptotischen Verhaltens bei  $\Lambda \rightarrow \infty$  für den Geistformfaktor und die laufende Kopplungskonstante

$$d(k = \Lambda \rightarrow \infty) \rightarrow g(\Lambda) . \quad (3.172)$$

Wie bereits in der Winkelnäherung (3.117) zu ersehen ist, besitzt das Integral  $I_d(k, \Lambda)$  (3.166) in der Geistgleichung im ultravioletten Bereich eine logarithmische Divergenz. Die Renormierung der Geistgleichung (3.165) erfolgt durch Subtraktion derselben Gleichung an einem beliebig wählbaren Renormierungsimpuls  $\mu$

$$\frac{1}{d(\mu, \Lambda)} = \frac{1}{g(\Lambda)} - I_d(\mu, \Lambda) \quad (3.173)$$

und führt auf

$$\frac{1}{d(k, \Lambda)} = \frac{1}{d(\mu, \Lambda)} - [I_d(k, \Lambda) - I_d(\mu, \Lambda)] . \quad (3.174)$$

Die Gl. (3.173) bestimmt, für eine feste Renormierungsskala  $\mu$ , den Verlauf der laufenden Kopplungskonstanten  $g(\mu, \Lambda)$  genau in solcher Weise, daß die logarithmische Divergenz in  $I_d(k, \Lambda)$  kompensiert und damit letztlich der Geistformfaktor  $d(k, \Lambda)$  unabhängig vom Cutoff  $\Lambda$  wird. Im Grenzfall  $\Lambda \rightarrow \infty$  ist diese Abhängigkeit von  $g(\Lambda)$  vom Cutoff  $\Lambda$  durch die Gl. (3.171) gegeben. Die Differenz  $I_d(k, \Lambda) - I_d(\mu, \Lambda)$  ist im ultravioletten Bereich endlich, so daß wir den Grenzprozeß  $\Lambda \rightarrow \infty$  in der Gl. (3.174) vornehmen können

$$\frac{1}{d(k)} = \frac{1}{d(\mu)} - \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} [I_d(k, \Lambda) - I_d(\mu, \Lambda)] \quad (3.175)$$

und mit der Bezeichnung  $d(k, \Lambda \rightarrow \infty) = d(k)$  die Unabhängigkeit des Geistformfaktors vom Cutoff  $\Lambda$  ausnutzen. Mit Gl. (3.175) ist die Schwinger-Dyson-Gleichung für den Geistformfaktor renormiert und enthält eine beliebige Renormierungskonstante  $d(\mu)$ .

Zur Renormierung der Integralgleichungen für die Krümmung  $\chi(k)$  (3.114) und den Coulombformfaktor  $f(k)$  (3.113) benutzen wir ebenfalls dieses minimale Subtraktionsschema. Wir

erhalten dadurch für eine beliebige Renormierungsskala  $\mu$  die renormierten Integralgleichungen

$$\chi(k) = \chi(\mu) + \Delta I_\chi(k) \quad (3.176)$$

$$f(k) = f(\mu) + \Delta I_f(k), \quad (3.177)$$

mit

$$\Delta I_\chi(k) = I_\chi(k, \Lambda) - I_\chi(\mu, \Lambda) \quad (3.178)$$

$$\Delta I_f(k) = I_f(k, \Lambda) - I_f(\mu, \Lambda). \quad (3.179)$$

Diese Differenzintegrale  $\Delta I_\chi$  und  $\Delta I_f$  sind ultraviolett endlich, so daß der Grenzprozeß  $\Lambda \rightarrow \infty$  realisiert werden kann. Die im Rahmen dieses Renormierungsprozesses eingeführten Renormierungskonstanten  $\chi(\mu)$  und  $f(\mu)$  haben grundsätzlich Einfluß auf den Verlauf der Lösungen. Wir werden jedoch im nächsten Abschnitt bei der Diskussion der numerischen Ergebnisse sehen, daß der Einfluß dieser Renormierungskonstanten auf das Lösungsverhalten sehr schwach ist und vor allen Dingen weder das infrarote noch das ultraviolette Verhalten der Lösungen beeinflußt.

Im Vergleich zur Renormierung der bisherigen Integralgleichungen für  $d(k)$ ,  $\chi(k)$  und  $f(k)$  ist die Behandlung der Gluongleichung (3.109) komplizierter. Das Renormierungsschema der minimalen Subtraktion an einer beliebigen Renormierungsskala führt auf die Gleichung

$$\omega(k)^2 = \omega(\mu)^2 + k^2 - \mu^2 + \chi(k)^2 - \chi(\mu)^2 + I_\omega(k) - I_\omega(\mu). \quad (3.180)$$

Diese Subtraktion eliminiert zwar die divergente Konstante  $I_\omega^0$  (3.110), jedoch bleibt in dem Differenzintegral  $I_\omega(k) - I_\omega(\mu)$  eine ultraviolette Divergenz enthalten. Die Ursache für das Auftreten dieser Divergenz ist einerseits auf die Beschränkung auf das Zweischleifenniveau in der Energieberechnung und damit insbesondere auf die Faktorisierung (3.97) zurückzuführen, und andererseits ist sie in der Beschränkung auf die Einschleifenterme bei der Berechnung der Funktionalableitung  $\frac{\delta E_C}{\delta \omega(k)}$  für die Gluongleichung zu sehen. Es ist bekannt, daß innerhalb der Schleifenentwicklung die Eichinvarianz nicht Ordnung für Ordnung erhalten ist [25], und deswegen kann der Abbruch dieser Schleifenentwicklung durch die Beschränkung auf das Zweischleifenniveau in der Energie zum Auftreten spurioser Divergenzen führen, wie im vorliegenden Fall. Da solche spuriosen Divergenzen durch Terme mit höherer Schleifenordnung wieder eliminiert werden, ist es an dieser Stelle gerechtfertigt, diese Divergenzen durch ein geeignetes Vorgehen zu eliminieren.

Um die spuriosen Divergenzen in der Gluongleichung identifizieren zu können, benutzen wir für das divergente Integral  $I_\omega(k)$  (3.111) die Darstellung

$$I_\omega(k, \Lambda) = I_\omega^{(2)}(k, \Lambda) + 2\chi(k)I_\omega^{(1)}(k, \Lambda), \quad (3.181)$$

mit

$$I_\omega^{(n)}(k, \Lambda) = \frac{N_C}{4} \int^\Lambda \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left(1 + (\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{q}})^2\right) \cdot \frac{d(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 f(\mathbf{k} - \mathbf{q})}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} \cdot \frac{[\omega(\mathbf{q}) - \chi(\mathbf{q})]^n - [\omega(\mathbf{k}) - \chi(\mathbf{k})]^n}{\omega(\mathbf{q})}. \quad (3.182)$$

Der erste Term in Gl. (3.181) enthält eine quadratische Divergenz. Da dieser quadratisch divergente Term in  $I_\omega^{(2)}(k)$  jedoch unabhängig vom äußeren Impuls  $k$  ist, eliminiert die minimale

Subtraktion diese Divergenz, und die Differenz  $I_\omega^{(2)}(k) - I_\omega^{(2)}(\mu)$  ist damit endlich. Das Integral  $I_\omega^{(1)}(k)$  im zweiten Term der Gl. (3.181) beinhaltet eine lineare Divergenz. Im Gegensatz zum ersten Term in (3.181) hat nun dieser linear divergente Term mit  $\chi(k)$  einen vom äußeren Impuls  $k$  abhängigen Vorfaktor, und damit bleibt die Differenz  $\chi(k)I_\omega^{(1)}(k, \Lambda) - \chi(\mu)I_\omega^{(1)}(\mu, \Lambda)$  divergent. Für die weitere Diskussion betrachten wir die Differenz  $I_\omega(k) - I_\omega(\mu)$  in der Form

$$\begin{aligned} I_\omega(k, \Lambda) - I_\omega(\mu, \Lambda) = & \underbrace{\left[ I_\omega^{(2)}(k, \Lambda) - I_\omega^{(2)}(\mu, \Lambda) \right]}_{\text{endlich}} + 2\chi(k) \underbrace{\left[ I_\omega^{(1)}(k, \Lambda) - I_\omega^{(1)}(\mu, \Lambda) \right]}_{\text{endlich}} \\ & + 2[\chi(k) - \chi(\mu)] \underbrace{I_\omega^{(1)}(\mu, \Lambda)}_{\text{divergent}}, \end{aligned} \quad (3.183)$$

in der  $I_\omega^{(1)}(k) - I_\omega^{(1)}(\mu)$  endlich und lediglich der letzte Term divergent ist. Dieser nach der Subtraktion verbleibende, divergente Term steht im unmittelbaren Zusammenhang mit der Krümmung  $\chi$  des Konfigurationsraumes und würde unter Vernachlässigung der Krümmung sofort verschwinden. Trotzdem wird die anschließende Diskussion der numerischen Lösungen zeigen, daß die Berücksichtigung der Krümmungsterme von fundamentaler Bedeutung für das physikalische Verhalten des Yang-Mills-Vakuums ist. Die in Gl. (3.183) verbleibende, spuriose Divergenz in  $I_\omega^{(1)}(k, \Lambda)$  verletzt zwar die Eichinvarianz, würde jedoch durch Terme mit höherem Schleifenniveau wieder eliminiert werden und damit zu einer endlichen Konstante  $I_\omega^{(1)}(k, \Lambda)$  führen. In der folgenden Behandlung werden wir aus den oben genannten Gründen lediglich den endlichen Teil der Konstante  $I_\omega^{(1)}(\mu)$  verwenden, welchen wir mit  $I_\omega'^{(1)}(\mu)$  bezeichnen. Da der genaue Wert dieser Konstanten  $I_\omega'^{(1)}(\mu)$  nicht bekannt ist, werden wir im Rahmen der numerischen Behandlung den Einfluß dieser Konstanten auf das Verhalten der Lösungen diskutieren.

Die Anwendung dieses Renormierungsschemas, insbesondere die Ersetzung der unendlichen Konstanten  $I_\omega^{(1)}(\mu, \Lambda)$  durch den endlichen Anteil  $I_\omega'^{(1)}(\mu)$ , auf die Gluungleichung (3.180) führt zu der Darstellung

$$\begin{aligned} \omega(k)^2 = & k^2 + \chi(k)^2 + \omega(\mu)^2 - \mu^2 - \chi(\mu)^2 + \left[ I_\omega^{(2)}(k, \Lambda) - I_\omega^{(2)}(\mu, \Lambda) \right] \\ & + 2\chi(k) \left[ I_\omega^{(1)}(k, \Lambda) - I_\omega^{(1)}(\mu, \Lambda) \right] + 2[\chi(k) - \chi(\mu)] I_\omega'^{(1)}(\mu). \end{aligned} \quad (3.184)$$

Unter Verwendung der renormierten Integralgleichung (3.176) für die Krümmung  $\chi(k)$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \omega(k)^2 = & k^2 - \mu^2 + \Delta I_\chi(k)^2 + \xi \Delta I_\chi(k) + \left[ I_\omega^{(2)}(k, \Lambda) - I_\omega^{(2)}(\mu, \Lambda) \right] \\ & + 2[\chi(\mu) + \Delta I_\chi(k)] \left[ I_\omega^{(1)}(k, \Lambda) - I_\omega^{(1)}(\mu, \Lambda) \right] + \omega(\mu)^2, \end{aligned} \quad (3.185)$$

mit der Renormierungskonstanten  $\xi$  anstelle von  $I_\omega'^{(1)}(\mu)$

$$\xi = 2 \left[ \chi(\mu) + I_\omega'^{(1)}(\mu) \right]. \quad (3.186)$$

Insgesamt enthalten die renormierten Integralgleichungen (3.175), (3.176), (3.177) und (3.185) fünf verschiedene Renormierungskonstanten  $d(\mu)$ ,  $\chi(\mu)$ ,  $f(\mu)$ ,  $\omega(\mu)$  und  $\xi$ . Im Rahmen der

numerischen Behandlung zeigt sich, daß der Einfluß dieser Renormierungskonstanten auf die selbstkonsistenten Lösungen der renormierten Integralgleichungen gering ist. Dies trifft für alle Renormierungskonstanten mit Ausnahme von  $d(\mu)$  zu. Ferner zeigt sich, daß weder das infrarote noch das ultraviolette Verhalten der Lösungen von den Werten der Renormierungskonstanten  $\chi(\mu)$ ,  $f(\mu)$ ,  $\omega(\mu)$  und  $\xi$  abhängt. Eine Ausnahme diesbezüglich stellt die Renormierungskonstante  $d(\mu)$  des Geistformfaktors dar. Nur für die Wahl des (kritischen) Wertes von  $d(\mu)$ , für welchen  $1/d(\mu \rightarrow 0) \rightarrow 0$  gilt, haben die gekoppelten Schwinger-Dyson-Gleichungen eine Lösung, welche zu den analytischen Lösungen aus dem Abschnitt 3.5.1 konsistent ist.

### 3.5.3 Numerische Ergebnisse

In diesem Abschnitt präsentieren wir die Ergebnisse der numerischen Behandlung des gekoppelten Schwinger-Dyson-Integralgleichungssystems (3.175), (3.185), (3.176) und (3.177) für den Geistformfaktor  $d(k)$ , die Gluonenergie  $\omega(k)$ , die skalare Krümmung  $\chi(k)$  und den Coulombformfaktor  $f(k)$ . Zu diesem Zweck ist es von Vorteil, dimensionslose Größen einzuführen, indem wir alle dimensionsbehafteten Funktionen mit der Gluonenergie  $\delta \equiv \omega(\mu)$  an einem beliebigen Renormierungspunkt  $\mu$  reskalieren. Wir bezeichnen die mit der Energie  $\delta$  reskalierten Größen mit einem Querstrich

$$\bar{k} = \frac{k}{\delta}, \quad \bar{\omega}(\bar{k}) = \frac{\omega(k = \bar{k}\delta)}{\delta}, \quad \bar{\chi}(\bar{k}) = \frac{\chi(k = \bar{k}\delta)}{\delta}. \quad (3.187)$$

Sowohl die Formfaktoren  $d(k)$  und  $f(k)$  als auch die Kopplungskonstante  $g$  sind in  $d = 3$  Dimensionen bereits dimensionslose Größen. Vor der numerischen Berechnung der gekoppelten Schwinger-Dyson-Gleichungen müssen zunächst die Renormierungskonstanten

$$d(\bar{\mu}), \quad \bar{\xi} = 2[\bar{\chi}(\bar{\mu}) + \bar{I}_{\omega}^{(1)}(\bar{\mu})], \quad \bar{\chi}(\bar{\mu}), \quad f(\bar{\mu}) \quad (3.188)$$

festgelegt werden. An dieser Stelle ist zu beachten, daß die Renormierungskonstante  $\omega(\mu)$  bereits in den dimensionslosen Größen implementiert ist.

Die gekoppelten Schwinger-Dyson-Integralgleichungen werden im Rahmen der numerischen Genauigkeit, ohne die Verwendung der bereits diskutierten Winkelnäherung, gelöst. Um in konsistenter Weise die Berechnung der Integralgleichungen auf dem Einschleifenniveau zu behandeln, sollten wir für den Coulombformfaktor  $f(k)$  (3.113) lediglich den führenden Term  $f(k) = 1$  berücksichtigen. Dadurch verlieren wir jedoch im perturbativen Bereich die anomale Dimension von  $f(k) (\sim 1/\sqrt{\ln k^2/\mu^2}, k \rightarrow \infty)$ , welche insbesondere für die Konvergenz einiger Einschleifenintegrale in der Gluonengleichung (3.185) wichtig ist. Um nun einerseits diese anomale Dimension und andererseits eine möglichst kleine Korrektur zu  $f(k) = 1$  zu erhalten, lösen wir die Integralgleichung (3.177) für den Coulombformfaktor unter Verwendung des nackten Geistformfaktors  $d(k) = 1$  und verwenden die Renormierungsbedingung  $f(\bar{\mu}) = 1$ .

Wir berechnen die Integrale in den Schwinger-Dyson-Gleichungen numerisch mit der Gauß-Legendre-Methode und benutzen, insbesondere um den infraroten Lösungsbereich mit hoher Genauigkeit zu erfassen, eine logarithmische Stützstellenverteilung für die Impulsintegration. Die nichtlinearen Integralgleichungen werden dann mit Hilfe eines speziell für diese Gleichungen entwickelten, iterativen Lösers selbstkonsistent gelöst.<sup>8</sup> In den Abb. 3.5, 3.6 und

<sup>8</sup>Nähere Details zu den hier verwendeten numerischen Methoden sind im Anhang B zu finden.

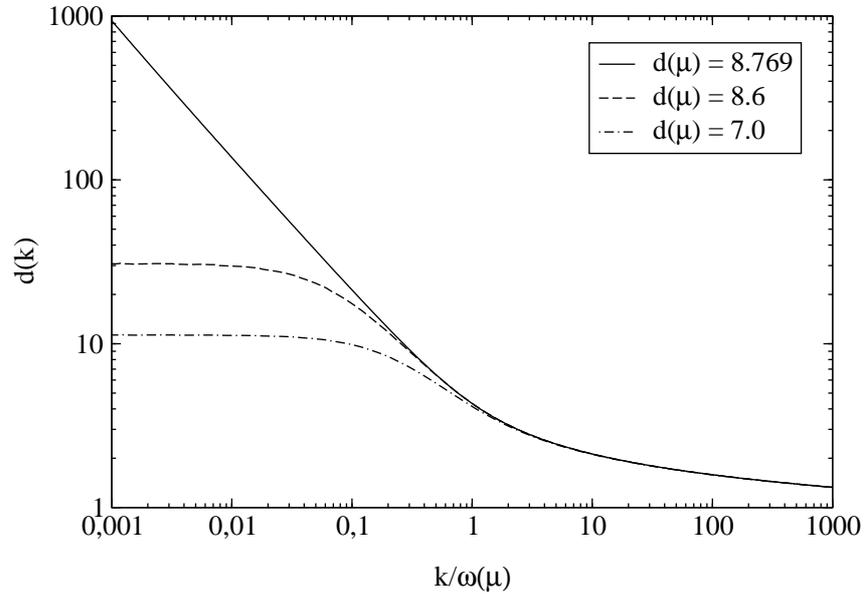


Abbildung 3.5: Lösungen für den Geistformfaktor  $d(k)$  für die Wahl unterschiedlicher Renormierungskonstanten  $d(\bar{\mu}) = 7.0, 8.6$  und  $8.716$ .

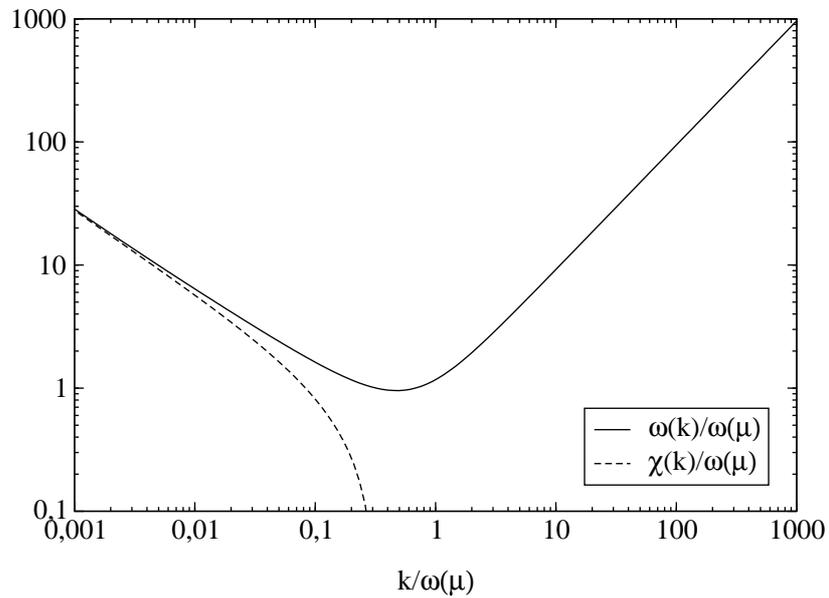


Abbildung 3.6: Lösung für die Gluonenergie  $\bar{\omega}(k)$  und die Krümmung  $\bar{\chi}(k)$  im Konfigurationsraum für den Renormierungswert  $\bar{\xi} = 0$ .

3.7 sind die mit dieser Methode berechneten, selbstkonsistenten Lösungen für die Wahl der Renormierungskonstanten  $\bar{\xi} = \bar{\chi}(\bar{\mu}) = 0$  dargestellt, an dem beliebig wählbaren Renormierungsimpuls  $\bar{\mu} = 0.32$ . Die noch verbleibende Renormierungskonstante  $d(\bar{\mu})$  des Geistformfaktors wird wie folgt fixiert.

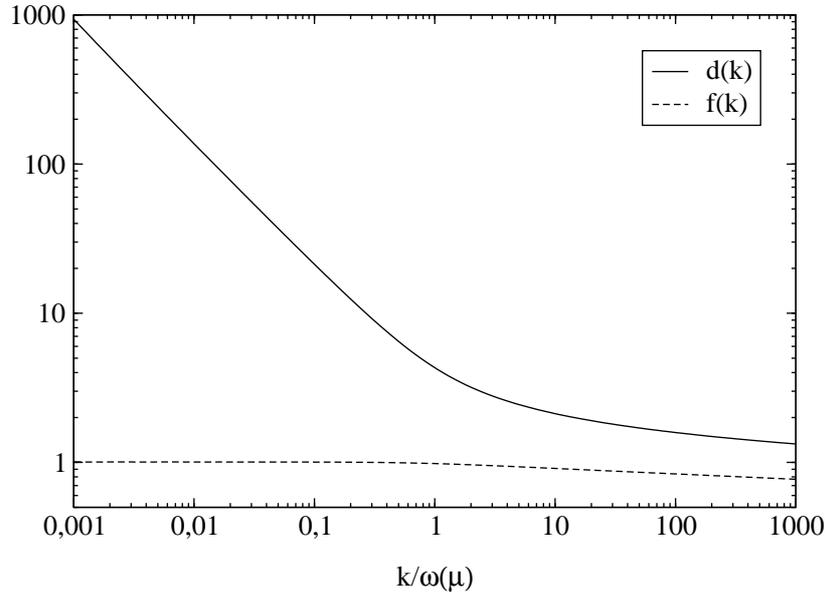


Abbildung 3.7: Geistformfaktor  $d(k)$  und Coulombformfaktor  $f(k)$  für  $\bar{\xi} = 0$ .

Die Integralgleichung (3.175) für den Geistformfaktor  $d(k)$  ist explizit unabhängig von der Krümmung  $\chi(k)$ , dem Coulombformfaktor  $f(k)$  und den Renormierungskonstanten  $\bar{\xi}$ ,  $\bar{\chi}(\mu)$  und  $f(\mu)$ . Somit hängt für eine vorgegebene Gluonenergie  $\bar{\omega}(k)$  die Lösung  $d(k)$  der Integralgleichung (3.175) lediglich von der Renormierungskonstanten  $d(\mu)$  ab. Die Abb. 3.5 zeigt, basierend auf der in Abb. 3.6 dargestellten Gluonenergie  $\bar{\omega}(k)$ , die unterschiedlichen Lösungen  $d(k)$  der Geistgleichung (3.175) für die jeweiligen Renormierungswerte von  $d(\mu)$ . Daraus ist ersichtlich, daß das ultraviolette Verhalten der unterschiedlichen Lösungen unabhängig von der Renormierungskonstanten  $d(\mu)$  ist und mit dem in Abschnitt 3.5.1 analytisch berechneten, asymptotischen Verhalten (3.131) übereinstimmt. Demgegenüber sehen wir eine starke Beeinflussung des infraroten Lösungsverhaltens von  $d(k)$  durch den Renormierungsparameter  $d(\mu)$ . Für Werte  $d(\mu) < d_{kr}$ , welche kleiner als der sogenannte kritische Wert  $d_{kr}$  sind, strebt die Lösung  $d(k)$  im infraroten Grenzfall  $k \rightarrow 0$  gegen eine Konstante. Am kritischen Punkt  $d(\mu) = d_{kr}$  divergiert der Geistformfaktor in Übereinstimmung mit dem analytischen Ergebnis (3.164) für den Grenzfall  $k \rightarrow 0$ . Für Werte von  $d(\mu) > d_{kr}$ , welche über dem kritischen Wert liegen, existiert keine Lösung für den Geistformfaktor mehr. Der kritische Wert  $d_{kr}$  ist also genau derjenige Wert von  $d(\mu)$ , welcher zu einem infrarot divergierenden Geistformfaktor führt und damit die „horizon condition“ [46]

$$d^{-1}(k \rightarrow 0) \rightarrow 0 \quad (3.189)$$

erfüllt. Dieser kritische Wert  $d_{kr}$  ist eindeutig und wird aus den folgenden Gründen als physikalischer Wert für  $d(\mu)$  identifiziert:

- i) Für die  $(2 + 1)$ -dimensionale Yang-Mills-Theorie läßt sich analytisch exakt beweisen, daß nur für einen divergierenden Geistformfaktor eine konsistente Lösung der Integralgleichungen existiert (siehe Abschnitt 3.6).

- ii) Nur für diesen kritischen Wert  $d_{kr}$  besitzt der Geistformfaktor ein infrarot divergentes Verhalten und erfüllt damit die „horizon condition“ (3.189).
- iii) Der im Infraroten divergierende Geistformfaktor stimmt mit den im Rahmen der analytischen Untersuchungen gefundenen Ergebnissen für den infraroten Grenzfall  $k \rightarrow 0$  überein (siehe Gl. (3.164)).
- iv) Der divergente Geistformfaktor bewirkt, wie wir später noch diskutieren werden, ein linear ansteigendes Coulombpotential.

An dem beliebig gewählten Renormierungspunkt  $\bar{\mu} = 0.32$  ist der kritische Wert für die Renormierungskonstante des Geistformfaktors durch  $d_{kr} = 8.769$  gegeben. Für die weitere Diskussion der numerischen Ergebnisse werden wir für die Renormierungskonstante  $d(\mu)$  den kritischen Wert  $d_{kr}$  zugrunde legen.

Nach der Festlegung der Renormierungskonstanten  $f(\mu)$  und  $d(\mu)$  ( $\omega(\mu)$  ist bereits in der Skalierung enthalten) untersuchen wir die Abhängigkeit der selbstkonsistenten Lösungen von den verbleibenden Renormierungskonstanten  $\bar{\xi}$  und  $\bar{\chi}(\mu)$ . Entsprechende Untersuchungen zeigen, daß bei einer Variation der Renormierungskonstanten  $\bar{\chi}(\mu)$  im Intervall  $[-1, 1]$  die Änderungen in der selbstkonsistenten Lösung kleiner als 0.001% sind und somit praktisch keine Abhängigkeit von der Renormierungskonstanten  $\bar{\chi}(\mu)$  vorliegt. Wir verwenden deshalb für alle numerischen Berechnungen den Wert  $\bar{\chi}(\mu) = 0$ .

Im Gegensatz dazu, wie in den Abb. 3.8 und 3.9 dargestellt, zeigen die selbstkonsistenten Lösungen für  $d(k)$  und  $\bar{\omega}(k)$  bei einer Variation von  $\bar{\xi}$  im Intervall  $[-1, 0]$  leichte Unterschiede. In Übereinstimmung mit den analytischen Untersuchungen im Abschnitt 3.5.1 bleiben

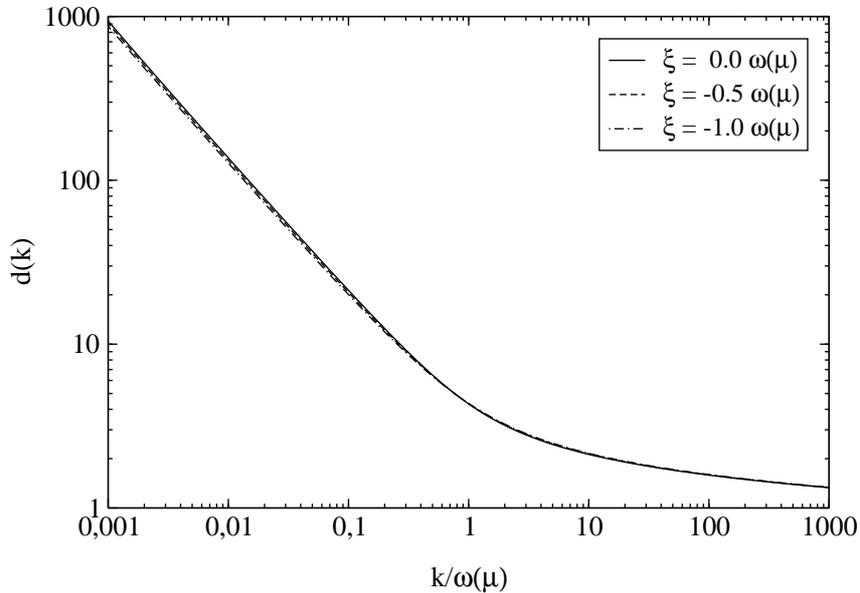
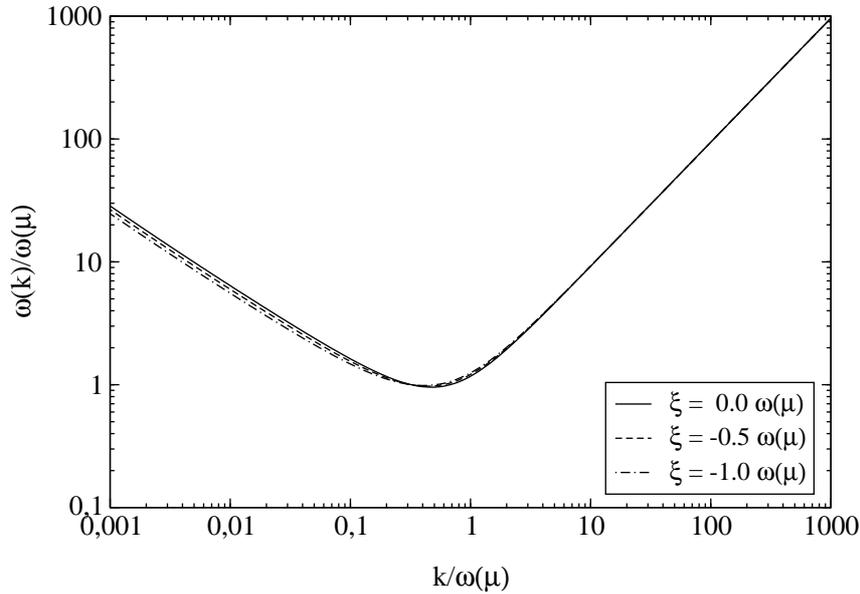


Abbildung 3.8: Geistformfaktor  $d(k)$  für  $\bar{\xi} = 0, -0.5$  und  $-1.0$ .

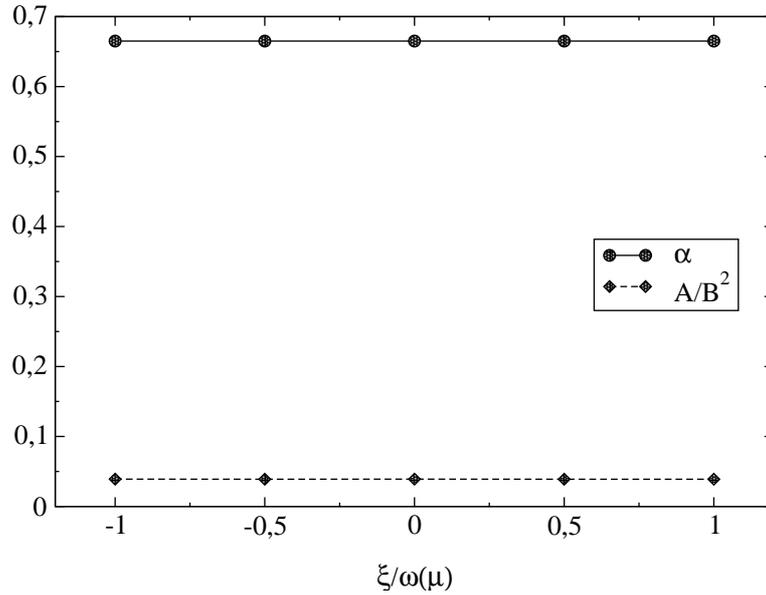
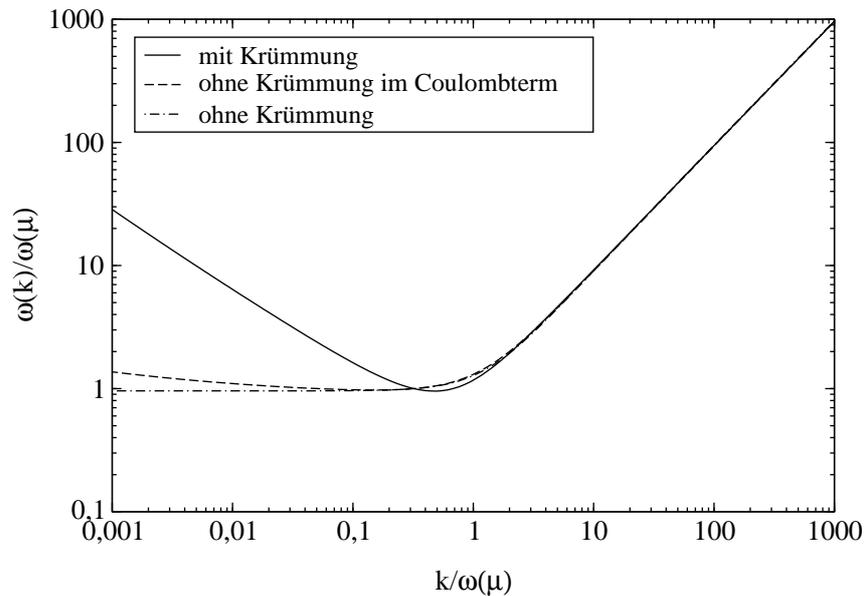
jedoch sowohl das ultraviolette als auch das infrarote Lösungsverhalten unabhängig von der speziellen Wahl der Renormierungskonstanten  $\bar{\xi}$ . Die analytischen Berechnungen zum infraroten Lösungsverhalten der Schwinger-Dyson-Gleichungen im Rahmen der Winkelnäherung


 Abbildung 3.9: Gluonenergie  $\bar{\omega}(k)$  für  $\bar{\xi} = 0, -0.5$  und  $-1.0$ .

zeigen, daß sowohl die infraroten Gluon- und Geistexponenten  $\alpha$  und  $\beta = \frac{1}{2}(\alpha + 1)$  als auch das Verhältnis  $\frac{A}{B^2}$  (3.144) der Infrarotkoeffizienten von  $\bar{\omega}(k)$  und  $d(k)$  unabhängig von den Renormierungskonstanten  $\bar{\xi}$  und  $\bar{\chi}(\mu)$  sind. Die numerischen Berechnungen im vorliegenden Abschnitt bestätigen diese Aussagen auch ohne die Benutzung der Winkelnäherung. In der Abb. 3.10 ist der Infrarotexponent  $\alpha$  und das Verhältnis  $\frac{A}{B^2}$  in Abhängigkeit von der Renormierungskonstanten  $\bar{\xi}$  dargestellt. Da in Abb. 3.10 praktisch keine Abhängigkeit der Größen von  $\bar{\xi}$  zu sehen ist, benutzen wir für die weitere Diskussion den Renormierungswert  $\bar{\xi} = 0$ .

Die im Rahmen dieser numerischen Untersuchung erhaltenen selbstkonsistenten Lösungen stehen in qualitativer Übereinstimmung mit den analytischen Berechnungen. Für große Impulse  $k \rightarrow \infty$  hat die Gluonenergie mit  $\omega(k) \sim \sqrt{k^2}$  das Verhalten eines nicht wechselwirkenden, freien Bosons, und die Krümmung des Konfigurationsraumes verschwindet asymptotisch mit  $\chi(k)/\omega(k) \sim \frac{1}{\sqrt{\ln k/\mu}}$ . Dieses Verhalten steht in Übereinstimmung mit den Vorstellungen der asymptotischen Freiheit. Für kleine Impulse  $k \rightarrow 0$  bewirkt die divergierende Gluonenergie  $\omega(k)$  eine Unterdrückung der freien Gluonen im Infraroten und liefert damit einen ersten Hinweis auf den Farbeinschluß. Während also einerseits der Gluonpropagator  $\frac{1}{2\omega(k)} \rightarrow 0$  im infraroten Grenzfall  $k \rightarrow 0$  verschwindet, divergiert andererseits der Geistpropagator  $d(k)/k^2$  für  $k \rightarrow 0$ . Interessanterweise ergeben Untersuchungen in Landau-Eichung [49, 50] im Rahmen der Funktionalintegralmethoden dasselbe Verhalten für den Gluon- und Geistpropagator.

Aus der Abb. 3.6 ist zu entnehmen, daß die Gluonenergie  $\omega(k)$  für  $k \rightarrow 0$  asymptotisch in die Krümmung  $\chi(k)$  übergeht. Dieses Verhalten wurde bereits im Rahmen der analytischen Behandlung in Abschnitt 3.5.1 gefunden und zeigt den Effekt der durch den Faddeev-Popov-Operator  $(-\partial_i \hat{D}_i)$  repräsentierten, nichttrivialen Metrik des Konfigurationsraumes. Diese nichttriviale Metrik  $(-\partial_i \hat{D}_i)$  bestimmt damit das infrarote Verhalten der Theorie und ist damit für den Farbeinschluß von zentraler Bedeutung. Dies verdeutlichen die in den Abb. 3.11 und 3.12 dargestellten selbstkonsistenten Lösungen für  $\omega(k)$  und  $d(k)$ , in welchen die

Abbildung 3.10:  $A/B^2$  und  $\alpha$  in Abhängigkeit von  $\bar{\xi}$ .Abbildung 3.11: Selbstkonsistente Lösung der Gluonenergie  $\bar{\omega}(k)$  bei unterschiedlicher Behandlung der Krümmung für  $\bar{\xi} = 0$ .

Krümmung einerseits vollständig enthalten ist, und andererseits wie in [21] nur im Coulombterm bzw. wie in [20] in allen Termen vernachlässigt wurde. Während im perturbativen Bereich  $k \rightarrow \infty$  die Lösungen übereinstimmen, sehen wir in dem für den Farbeinschluß relevanten Bereich  $k \rightarrow 0$  ein deutlich unterschiedliches Verhalten, obwohl wir in allen drei Fällen die Horizontbedingung  $d^{-1}(k \rightarrow 0) = 0$  als Renormierungsbedingung für  $d(\mu)$  zugrunde legen.

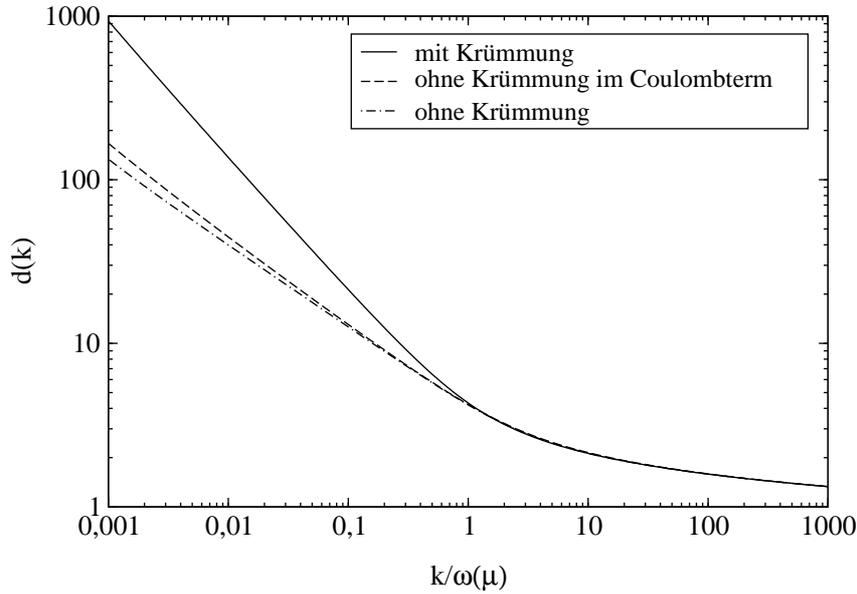


Abbildung 3.12: Selbstkonsistente Lösung des Geistformfaktors  $d(k)$  bei unterschiedlicher Behandlung der Krümmung für  $\bar{\xi} = 0$ .

Insbesondere führt die vollständige Vernachlässigung der Krümmung auf eine endliche Gluonenergie  $\omega(k \rightarrow 0) = \text{const.}$  im Infraroten und bewirkt damit den Verlust des Farbeinschlusses der Gluonen. Für die Infrarotexponenten (3.144) gilt dann, basierend auf der Summenregel (3.156),  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \frac{1}{2}$  und  $\gamma = 0$ . Somit besitzen die Gluonenergie und der Geistformfaktor unter Vernachlässigung der Krümmung das asymptotische Verhalten  $d(k) \sim \frac{1}{\sqrt{k}}$  und  $\omega(k) = \text{const.}$  im Grenzfall  $k \rightarrow 0$ .

### 3.5.4 Das nicht-abelsche Coulombpotential

Der Erwartungswert des Coulombterms im Yang-Mills-Hamiltonoperator (3.6) kann als wechselwirkendes Potential zwischen Farbladungsdichten  $\rho^a(\mathbf{x})$  interpretiert werden. Dieses statische Quarkpotential läßt sich aus dem Coulombterm durch die Bildung des Erwartungswertes ableiten unter der Annahme, daß die Farbladungsdichte  $\rho^a(\mathbf{x})$  durch zwei statische, unendlich schwere Farbladungsdichten

$$\rho^a(x) = gq_{(1)}^a \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{(1)}) + gq_{(2)}^a \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{(2)}) \quad (3.190)$$

gegeben ist. Die beiden statischen Farbladungen sind jeweils am Ort  $\mathbf{x}_{(1)}$  bzw.  $\mathbf{x}_{(2)}$  lokalisiert und haben somit den Abstand  $\mathbf{r} = \mathbf{x}_{(1)} - \mathbf{x}_{(2)}$  voneinander. Mit dieser Ladungsverteilung finden wir die Coulombenergie

$$E_C = E_C^{(1)} + E_C^{(2)} + q_{(1)}^a V^{ab}(\mathbf{x}_{(1)}, \mathbf{x}_{(2)}) q_{(2)}^b, \quad (3.191)$$

in der  $E_C^{(1,2)}$  die (divergenten) Selbstenergien der beiden statischen Quarks sind und

$$V^{ab}(\mathbf{x}_{(1)}, \mathbf{x}_{(2)}) = g^2 \langle \omega | F^{ab}(\mathbf{x}_{(1)}, \mathbf{x}_{(2)}) | \omega \rangle \quad (3.192)$$

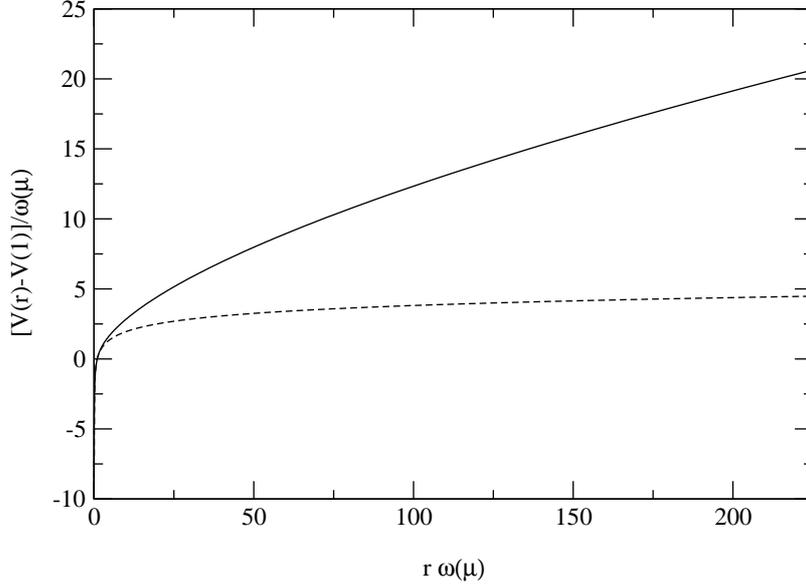


Abbildung 3.13: Nicht-abelsches Coulombpotential für  $\bar{\xi} = 0$  mit Berücksichtigung der Krümmung im Konfigurationsraum (volle Linie) und unter Vernachlässigung der Krümmung (gestrichelte Linie).

das statische Quarkpotential darstellt. Dabei ist  $F^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  der in Gl. (3.12) definierte Coulombpropagator. Innerhalb des hier diskutierten Einschleifenniveaus ist dieses Potential diagonal im Farbraum und besitzt somit mit (3.74) die explizite Darstellung

$$V(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d(k)^2 f(k)}{k^2} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} V(k) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (3.193)$$

In diesem Integral können wir die Winkelintegration analytisch durchführen und erhalten schließlich

$$V(r) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk d(k)^2 f(k) \frac{\sin(kr)}{kr}. \quad (3.194)$$

Bevor wir das numerische Ergebnis für das nicht-abelsche Coulombpotential präsentieren, diskutieren wir zunächst das asymptotische Verhalten für  $k \rightarrow 0$  und  $k \rightarrow \infty$ . Das im Abschnitt 3.5.1 gefundene asymptotische Verhalten im infraroten Bereich  $f(k \rightarrow 0) = \text{const.}$  und  $d(k \rightarrow 0) \sim \frac{1}{k}$  führt auf das Verhalten  $V(k) \sim 1/k^4$  und damit exakt auf ein linear ansteigendes Coulombpotential. Unter Verwendung des asymptotischen Verhaltens  $d(k) \sim \frac{1}{\sqrt{\ln k/\mu}}$  für den Geistformfaktor (3.143) und der führenden Ordnung im Coulombformfaktor  $f(k) = 1$  finden wir im ultravioletten Grenzfall  $k \rightarrow \infty$

$$k^2 V(k) \sim \frac{1}{\ln k/\mu}, \quad k \rightarrow \infty. \quad (3.195)$$

Dieses Verhalten steht in Übereinstimmung mit dem in [51] gefundenen Ergebnis im Rahmen der Einschleifen-Störungstheorie.

Basierend auf den Ergebnissen des letzten Abschnitts können wir das in der Abb. 3.13 dargestellte, nicht-abelsche Coulombpotential numerisch berechnen. Wir erhalten einerseits für kleine Abstände das gewöhnliche  $\sim \frac{1}{r}$  Verhalten und andererseits für große Abstände ein nahezu linear ansteigendes Coulombpotential. Die genaue numerische Analyse ergibt für das infrarote Verhalten  $1/k^{3.7}$  im Gegensatz zu  $1/k^4$ , welches für ein exakt linear ansteigendes Potential notwendig ist. Eine in [52] mit Funktionalintegralmethoden durchgeführte Analyse des Coulombpotentials führt auf  $1/k^{3.6}$ .

Die Vernachlässigung der Krümmung im Konfigurationsraum bewirkt nicht nur eine im Infraroten endliche Gluonenergie, sondern führt auch auf ein konstantes Coulombpotential für große Abstände  $r \rightarrow \infty$  (siehe Abb. 3.13). Wir verlieren damit also sowohl den Farbeinschluß der Gluonen als auch den der Quarks, wenn wir die Krümmung in den Schwinger-Dyson-Gleichungen vernachlässigen. Die vorliegenden Untersuchungen zeigen also, daß die vollständige Implementierung der Krümmung des Konfigurationsraumes, welche durch den Faddeev-Popov-Operator zum Ausdruck kommt, von zentraler Bedeutung für die Eigenschaften des Farbeinschlusses ist.

Die im Rahmen der analytischen und numerischen Untersuchungen gefundenen Ergebnisse unterscheiden sich wesentlich zu den in den Arbeiten [20, 21] von A. P. Szczepaniak und E. S. Swanson gewonnenen Ergebnissen.

In der ersten Arbeit [20] wurde die Faddeev-Popov-Determinante vollständig vernachlässigt. Dies führt zum Verlust der Krümmungsterme in der Vakuumenergie und hat daher insbesondere im Hinblick auf das Infrarotverhalten und damit auf den Farbeinschluß der Gluonen und Quarks erhebliche Konsequenzen. Einerseits ist dann die Gluonenergie für  $k \rightarrow 0$  endlich (Abb. 3.11) und andererseits zeigt das Coulombpotential für diesen Fall keinen Farbeinschluß mehr (Abb. 3.13). Noch drastischer sind die Konsequenzen im  $D = 2 + 1$  dimensional Fall, welcher im Abschnitt 3.6 behandelt wird. Dort beweisen wir ohne Verwendung einer Näherung, daß bei Vernachlässigung der Krümmungsterme keine konsistente Lösung der Schwinger-Dyson-Integralgleichungen mehr existiert. Insofern ist die in [20] vorgenommene Vernachlässigung der Faddeev-Popov-Determinanten nicht zulässig.

Im Gegensatz dazu enthalten die analytischen Berechnungen in der zweiten Arbeit [21] die Krümmungsterme, welche durch die Faddeev-Popov-Determinante zustande kommen. Allerdings ist in dieser Untersuchung die Krümmungsfunktion (3.88)  $\chi(k)$  um den Faktor 2 zu groß, und andererseits werden bei der numerischen Behandlung alle Krümmungsterme innerhalb der Coulombenergie vernachlässigt. Dieser Unterschied in der Krümmungsfunktion hat weitreichende Konsequenzen. Eine entsprechende Untersuchung des infraroten Lösungsverhaltens der Schwinger-Dyson-Integralgleichungen (vgl. Abschnitt 3.5.1) mit einer um den Faktor 2 zu großen Krümmung führt auf komplexe Infrarotexponenten in den Funktionen (2.147). Aufgrund dessen ist es nicht verwunderlich, daß die Lösungen in [21] für die Gluonenergie und den Geistformfaktor einen konstanten Verlauf zeigen und damit weder den Farbeinschluß der Gluonen noch der Quarks enthalten. Selbst die Berücksichtigung der richtigen Krümmungsfunktion (3.88)  $\chi(k)$  unter Vernachlässigung der Krümmungsterme im Coulombintegral führt auf ein völlig anderes Infrarotverhalten als die Lösungen bei vollständiger Implementierung der Krümmung in allen Energietermen (vgl. Abb. 3.11 und 3.12).

### 3.6 Yang-Mills-Theorie in $D = 2 + 1$ Dimensionen

Die Yang-Mills-Theorie in  $D = 2 + 1$  Dimensionen ist in mehrfacher Hinsicht von Interesse. Einerseits nimmt sie im Zusammenhang mit dem Hochtemperaturlimes der  $(3 + 1)$ -dimensionalen Theorie, welcher einer  $(2 + 1)$ -dimensionalen Yang-Mills-Theorie zusammen mit einem Higgsfeld entspricht, eine zentrale Rolle ein. Andererseits stellt sie für die Untersuchung der nicht-perturbativen Eigenschaften des Yang-Mills-Vakuums, insbesondere des Farbeinschlusses, eine interessante Modelltheorie dar. Wir untersuchen deshalb im vorliegenden Abschnitt die Eigenschaften der Schwinger-Dyson-Integralgleichungen für die Gluonenergie (3.109), den Geistformfaktor (3.112), den Coulombformfaktor (3.113) und die Krümmung im Konfigurationsraum (3.114) in  $D = 2 + 1$  Dimensionen und stellen die Unterschiede zu den bereits präsentierten Ergebnissen für  $D = 3 + 1$  in den Mittelpunkt der Diskussion.

Da in  $2 + 1$  Dimensionen die Kopplungskonstante  $g$  die Dimension  $\sqrt{E}$  besitzt, können wir alle dimensionsbehafteten Größen mit der Kopplungskonstanten  $g$  skalieren und erhalten insbesondere mit

$$\bar{k} = \frac{k}{g^2}, \quad \bar{\omega}(\bar{k}) = \frac{\omega(g^2\bar{k})}{g^2}, \quad \bar{d}(\bar{k}) = \frac{d(g^2\bar{k})}{g}, \quad \bar{f}(\bar{k}) = f(g^2\bar{k}), \quad \bar{\chi}(\bar{k}) = \frac{\chi(g^2\bar{k})}{g^2} \quad (3.196)$$

dimensionslose Größen. Diese Reskalierung bewirkt außerdem die vollständige Elimination der Kopplungskonstanten  $g$  aus allen Schwinger-Dyson-Integralgleichungen. Basierend auf den dimensionslosen Funktionen (3.196) erhalten wir für die Gluonenergie

$$\bar{\omega}(\bar{\mathbf{k}})^2 = \bar{\mathbf{k}}^2 + \bar{\chi}(\bar{\mathbf{k}})^2 + \bar{I}_\omega(\bar{\mathbf{k}}) + \bar{I}_\omega^0 \quad (3.197)$$

mit

$$\bar{I}_\omega^0 = \frac{N_C}{2} \int \frac{d^2\bar{q}}{(2\pi)^2} \left( 1 - \frac{(\bar{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{q}})^2}{\bar{\mathbf{k}}^2\bar{\mathbf{q}}^2} \right) \frac{1}{\bar{\omega}(\bar{\mathbf{q}})} \quad (3.198)$$

$$\bar{I}_\omega(\bar{\mathbf{k}}) = \frac{N_C}{2} \int \frac{d^2\bar{q}}{(2\pi)^2} \frac{(\bar{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{q}})^2}{\bar{\mathbf{k}}^2\bar{\mathbf{q}}^2} \cdot \frac{\bar{d}(\bar{\mathbf{k}} - \bar{\mathbf{q}})^2 \bar{f}(\bar{\mathbf{k}} - \bar{\mathbf{q}})}{(\bar{\mathbf{k}} - \bar{\mathbf{q}})^2} \cdot \frac{[\bar{\omega}(\bar{\mathbf{q}}) - \bar{\chi}(\bar{\mathbf{q}}) + \bar{\chi}(\bar{\mathbf{k}})]^2 - \bar{\omega}(\bar{\mathbf{k}})^2}{\bar{\omega}(\bar{\mathbf{q}})}, \quad (3.199)$$

für den Geistformfaktor

$$\frac{1}{\bar{d}(\bar{\mathbf{k}})} = 1 - \frac{N_C}{2} \int \frac{d^2\bar{q}}{(2\pi)^2} \left( 1 - \frac{(\bar{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{q}})^2}{\bar{\mathbf{k}}^2\bar{\mathbf{q}}^2} \right) \frac{\bar{d}(\bar{\mathbf{k}} - \bar{\mathbf{q}})}{(\bar{\mathbf{k}} - \bar{\mathbf{q}})^2 \bar{\omega}(\bar{\mathbf{q}})} = 1 - \bar{I}_d(\bar{\mathbf{k}}), \quad (3.200)$$

den Coulombfaktor

$$\bar{f}(\bar{\mathbf{k}}) = 1 + \frac{N_C}{2} \int \frac{d^2\bar{q}}{(2\pi)^2} \left( 1 - \frac{(\bar{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{q}})^2}{\bar{\mathbf{k}}^2\bar{\mathbf{q}}^2} \right) \frac{\bar{d}(\bar{\mathbf{k}} - \bar{\mathbf{q}})^2 \bar{f}(\bar{\mathbf{k}} - \bar{\mathbf{q}})}{(\bar{\mathbf{k}} - \bar{\mathbf{q}})^2 \bar{\omega}(\bar{\mathbf{q}})} = 1 + \bar{I}_f(\bar{\mathbf{k}}) \quad (3.201)$$

und die Krümmung im Konfigurationsraum

$$\bar{\chi}(\bar{\mathbf{k}}) = \frac{N_C}{2} \int \frac{d^2\bar{q}}{(2\pi)^2} \left( 1 - \frac{(\bar{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{q}})^2}{\bar{\mathbf{k}}^2\bar{\mathbf{q}}^2} \right) \frac{\bar{d}(\bar{\mathbf{k}} - \bar{\mathbf{q}}) \bar{d}(\bar{\mathbf{q}})}{(\bar{\mathbf{k}} - \bar{\mathbf{q}})^2} = \bar{I}_\chi(\bar{\mathbf{k}}). \quad (3.202)$$

Für die folgenden Untersuchungen und Diskussionen verzichten wir in der Notation auf den Querbalken für die dimensionslosen Größen und bezeichnen diese wie bisher ohne Querbalken.

### 3.6.1 Exakte analytische Eigenschaften

Für die Yang-Mills-Theorie in  $2 + 1$  Dimensionen lassen sich einige exakte Aussagen über die Schwinger-Dyson-Integralgleichungen (3.197), (3.200), (3.201) und (3.202) beweisen, welche insbesondere im Hinblick auf die Konsistenz der Lösungen interessante Schlußfolgerungen erlauben. Wir werden zunächst diese Eigenschaften der Integralgleichungen, welche auf keiner Näherung basieren, beweisen und anschließend die sich daraus ergebenden, physikalischen Konsequenzen diskutieren.

Dazu betrachten wir zunächst den Geistformfaktor  $d(k)$ , welcher durch die Integralgleichung (3.200) bestimmt ist. Das Integral  $I_d(k)$  dieser Schwinger-Dyson-Gleichung ist in  $2 + 1$  Dimensionen konvergent und erfordert damit keine Renormierung. Für den Geistformfaktor können wir folgende Behauptung beweisen.

**Beh. 1:** Falls  $d(k)$  im Intervall  $(0, \infty)$  stetig ist, gilt  $d(k) \geq 1$  für alle  $k \in (0, \infty)$ .

Der Beweis dieser Behauptung erfolgt durch Widerspruch. Wir nehmen zunächst an, es gelte  $d(k) < 0$  für alle  $k \in (0, \infty)$ . Da aufgrund der Normierbarkeit des Wellenfunktionals (3.34)  $\omega(k) \geq 0$  ist, folgt aus (3.200)  $-I_d(k) \geq 0$  und damit  $\frac{1}{1-I_d(k)} = d(k) > 0$ . Dies ist ein Widerspruch zur Annahme  $d(k) < 0$ . Damit kann also  $d(k)$  nicht auf dem kompletten Intervall  $(0, \infty)$  negativ sein. Wir nehmen im folgenden an, daß es zumindest einen Impuls  $k'$  gibt, für den  $d(k') < 0$  ist. Da nach Voraussetzung  $d(k)$  stetig ist und andererseits nicht auf dem gesamten Impulsbereich negativ sein kann, muß  $d(k)$  mindestens eine Nullstelle  $k_0$  mit  $d(k_0) = 0$  besitzen. Damit dies möglich ist, muß nach Gl. (3.200)  $I_d(k)$  bei  $k_0$  einen Vorzeichenwechsel haben und somit für  $\epsilon > 0$  entweder  $I_d(k_0 + \epsilon k_0) > 0$  und  $I_d(k_0 - \epsilon k_0) < 0$  oder  $I_d(k_0 + \epsilon k_0) < 0$  und  $I_d(k_0 - \epsilon k_0) > 0$  gelten. Eine kleine Umformung ergibt

$$I_d(k_0 + \epsilon k_0) = \frac{N_C}{2} \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \left( 1 - \frac{(\mathbf{k}_0(\mathbf{q} + \epsilon \mathbf{k}_0))^2}{\mathbf{k}_0^2((\mathbf{q} + \epsilon \mathbf{k}_0))^2} \right) \frac{d(\mathbf{k}_0 - \mathbf{q})}{(\mathbf{k}_0 - \mathbf{q})^2 \omega(\mathbf{q} + \epsilon \mathbf{k}_0)} \quad (3.203)$$

und

$$I_d(k_0 - \epsilon k_0) = \frac{N_C}{2} \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \left( 1 - \frac{(\mathbf{k}_0(\mathbf{q} - \epsilon \mathbf{k}_0))^2}{\mathbf{k}_0^2((\mathbf{q} - \epsilon \mathbf{k}_0))^2} \right) \frac{d(\mathbf{k}_0 - \mathbf{q})}{(\mathbf{k}_0 - \mathbf{q})^2 \omega(\mathbf{q} - \epsilon \mathbf{k}_0)}. \quad (3.204)$$

Dies zeigt, daß sowohl  $I_d(k_0 + \epsilon k_0)$  als auch  $I_d(k_0 - \epsilon k_0)$  dasselbe Vorzeichen besitzen, was im Widerspruch zur obigen Annahme steht. Somit gilt  $d(k) \geq 0$ . Aus der Gl. (3.200) folgt damit  $I_d(k) \geq 0$  und insbesondere  $d(k) = \frac{1}{1-I_d(k)} \geq 1$ .

Im Hinblick auf die Konsistenz der Integralgleichungen ist die folgende Behauptung von zentraler Bedeutung.

**Beh. 2:** Sei  $d(k)$  im Intervall  $(0, \infty)$  stetig und  $\omega(k)$  erfülle das folgende Verhalten: Es existiert ein  $\epsilon > 0$  mit  $\omega(k) \leq a(-\ln k) \quad \forall k \in (0, \epsilon]$  mit einem beliebigen  $a > 0$ . Dann besitzt die Integralgleichung (3.200) für den Geistformfaktor keine Lösung.

Der Beweis dieser Behauptung erfolgt ebenfalls durch Widerspruch. Für ein  $k < \epsilon$  gilt

$$I_d(k) = \frac{N_C}{8\pi^2} \int_0^\infty dq \frac{q}{\omega(q)} \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2 \varphi \cdot \frac{d(\mathbf{k} - \mathbf{q})}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} \quad (3.205)$$

und wegen  $d(k) \geq 0$  (Beh. 1)

$$I_d(k) \geq \frac{N_C}{8\pi^2} \int_0^\infty dq \frac{q}{\omega(q)} \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2 \varphi \cdot \frac{1}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} \geq \frac{N_C}{8\pi^2} \int_0^\epsilon dq \frac{q}{\omega(q)} \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2 \varphi \cdot \frac{1}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2}. \quad (3.206)$$

Die Winkelintegration können wir analytisch berechnen und erhalten dann

$$I_d(k) \geq \frac{N_C}{8\pi^2} \left[ \int_0^k dq \frac{q}{\omega(q)} \frac{\pi}{k^2} + \int_k^\epsilon dq \frac{q}{\omega(q)} \frac{\pi}{q^2} \right] \geq \frac{N_C}{8\pi} \int_k^\epsilon dq \frac{1}{q\omega(q)}. \quad (3.207)$$

Für das infrarote Verhalten der Gluonenergie  $\omega(k)$  gilt nach der obigen Voraussetzung  $\omega(q) \leq a(-\ln q)$  für  $q \in (0, \epsilon]$ . Damit ergibt sich die folgende Abschätzung für das Integral  $I_d(k)$

$$I_d(k) \geq \frac{N_C}{8\pi} \int_k^\epsilon dq \frac{1}{qa(-\ln q)} = \frac{N_C}{8\pi a} \ln \left| \frac{\ln k}{\ln \epsilon} \right| \xrightarrow{k \rightarrow 0} \infty \quad (3.208)$$

und somit

$$I_d(k) \xrightarrow{k \rightarrow 0} \infty. \quad (3.209)$$

Unter Verwendung der Integralgleichung (3.200)  $d(k) = \frac{1}{1 - I_d(k)}$  impliziert dies insbesondere das Verhalten  $d(k \rightarrow 0) \rightarrow 0$ , welches im Widerspruch zu  $d(k) \geq 1$  (Beh. 1) steht. Damit ist die Beh. 2 bewiesen.

Nach dieser Behauptung können wir also nur dann eine konsistente Lösung erhalten, wenn die Gluonenergie  $\omega(k)$  im infraroten Bereich mehr als nur logarithmisch divergiert. Bereits bei der Untersuchung der  $(3+1)$ -dimensionalen Theorie hat sich gezeigt, daß das infrarote Verhalten der Gluonenergie durch die Krümmung  $\chi(k)$  im Konfigurationsraum bestimmt wird (siehe Gl. (3.162)). Wie wir im folgenden sehen werden, ist dies in der  $D = 2 + 1$  dimensionalen Theorie ebenfalls der Fall. Basierend auf diesem Zusammenhang zwischen der Gluonenergie  $\omega(k)$  und der Krümmung  $\chi(k)$  im Infraroten ist die folgende Behauptung von Bedeutung.

**Beh. 3:** Angenommen, der Geistformfaktor  $d(k)$  besitzt eine obere Schranke  $M > 0$ , so daß gilt  $M \geq d(k) \quad \forall k \in (0, \infty)$ . Dann gilt für die Krümmung  $\chi(k)$  im Konfigurationsraum

$$M^2 \alpha - M^2 \frac{N_C}{8\pi} \ln k \geq \chi(k) \geq \alpha - \frac{N_C}{8\pi} \ln k \quad (3.210)$$

mit einem  $\alpha > 0$ . Insbesondere divergiert dann  $\chi(k)$  logarithmisch im infraroten Bereich.

Beweis: Im Gegensatz zur Integralgleichung (3.200) besitzt das Integral  $I_\chi(k)$  (3.202) der Krümmung eine ultraviolette Divergenz und erfordert somit eine Regularisierung. Für diesen

Zweck benutzen wir für das Integral  $I_\chi(k)$  einen „Impuls-Cutoff“  $\Lambda$ . Wegen  $M \geq d(k) \geq 1$  gilt die Abschätzung

$$\frac{N_C}{2} M^2 \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \left(1 - \frac{(\mathbf{k}\mathbf{q})^2}{\mathbf{k}^2 \mathbf{q}^2}\right) \frac{1}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} \geq \chi(k) \geq \frac{N_C}{2} \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \left(1 - \frac{(\mathbf{k}\mathbf{q})^2}{\mathbf{k}^2 \mathbf{q}^2}\right) \frac{1}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} \quad (3.211)$$

bzw. nach der Winkelintegration

$$\frac{N_C}{8\pi^2} M^2 \left[ \int_0^k dq q \frac{\pi}{k^2} + \int_k^\Lambda dq q \frac{\pi}{q^2} \right] \geq \chi(k) \geq \frac{N_C}{8\pi^2} \left[ \int_0^k dq q \frac{\pi}{k^2} + \int_k^\Lambda dq q \frac{\pi}{q^2} \right]. \quad (3.212)$$

Daraus folgt

$$\frac{N_C}{8\pi} M^2 \left[ \frac{1}{2} + \ln \frac{\Lambda}{k} \right] \geq \chi(k) \geq \frac{N_C}{8\pi} \left[ \frac{1}{2} + \ln \frac{\Lambda}{k} \right] \quad (3.213)$$

und damit die Behauptung

$$M^2 \alpha - M^2 \frac{N_C}{8\pi} \ln k \geq \chi(k) \geq \alpha - \frac{N_C}{8\pi} \ln k \quad (3.214)$$

mit  $\alpha = \frac{N_C}{8\pi} \left( \frac{1}{2} + \ln \Lambda \right)$ .<sup>9</sup>

Im Rahmen der analytischen Untersuchung für die  $(3 + 1)$ -dimensionale Yang-Mills-Theorie im Abschnitt 3.5.1 konnten wir zeigen, daß im infraroten Grenzfall  $k \rightarrow 0$  die Gluonenergie  $\omega(k)$  von der Krümmung  $\chi(k)$  im Konfigurationsraum dominiert wird und insbesondere  $\omega(k \rightarrow 0) = \chi(k \rightarrow 0)$  (vgl. (3.162)) gilt. Die dort verwendete Argumentation läßt sich sofort auf den hier diskutierten  $(2 + 1)$ -dimensionalen Fall übertragen und führt ebenfalls auf das asymptotische Verhalten

$$\omega(k \rightarrow 0) = \chi(k \rightarrow 0) \quad (3.215)$$

für die  $(2 + 1)$ -dimensionale Gluonenergie  $\omega(k)$ . Diese Dominanz der Krümmung  $\chi(k)$  für das infrarote Verhalten ist ein zentraler Bestandteil der numerischen Ergebnisse, welche wir detailliert im Abschnitt 3.6.4 diskutieren werden.

Alternativ zu dieser mathematischen Argumentation aus dem Abschnitt 3.5.1 können wir die Dominanz der Krümmung auch mit Hilfe der Vakuumenergien  $E_p$  (3.91),  $E_k$  (3.102) und  $E_c$  (3.104) verstehen. Dazu betrachten wir zunächst die potentielle Energie  $E_p$  (3.91). Während das erste Integral in (3.91) lediglich zu einer Konstanten in der Gluonengleichung (3.109) führt und damit nach der Renormierung durch die minimale Subtraktion keine Rolle mehr spielt, erhält das zweite Integral in (3.91) massive Beiträge aus dem Integrationsbereich mit großen Impulsen  $k$  und demgegenüber verschwindend geringe Beiträge aus der infraroten Region mit kleinen Impulsen  $k \rightarrow 0$ . Somit nimmt die potentielle Energie  $E_p$  (3.91) für das Infrarotverhalten der Theorie eine untergeordnete Rolle ein. Völlig anders ist dieser Sachverhalt bei der kinetischen Energie  $E_k$  (3.102) und der Coulombenergie  $E_c$  (3.104). Beide

<sup>9</sup>Nach der Renormierung der Krümmungsfunktion  $\chi(k)$  mit Hilfe der bereits im Abschnitt 3.5.2 diskutierten minimalen Subtraktion wird die Konstante  $\alpha$  vom Cutoff  $\Lambda$  unabhängig.

Energien enthalten die Krümmung  $\chi(k)$  des Konfigurationsraumes, welche – wie die Beh. 3 zeigt – selbst für einen konstanten Geistformfaktor im infraroten Grenzfall  $k \rightarrow 0$  divergiert. Wäre beispielsweise die Gluonenergie  $\omega(k)$  konstant für kleine Impulse  $k$ , dann würde die im Infraroten divergierende Krümmung  $\chi(k)$  zu großen Energiebeiträgen aus der infraroten Region führen. Aus den mathematischen Ausdrücken für die kinetische Energie

$$E_k = \frac{N_C^2 - 1}{4} \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \int d^2k \frac{[\omega(\mathbf{k}) - \chi(\mathbf{k})]^2}{\omega(\mathbf{k})} \quad (3.216)$$

und die Coulombenergie

$$E_c = \frac{N_C(N_C^2 - 1)}{16} \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \int \frac{d^2k d^2k'}{(2\pi)^d} (\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}')^2 \frac{d(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 f(\mathbf{k} - \mathbf{k}')}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2} \cdot \frac{\left( [\omega(\mathbf{k}) - \chi(\mathbf{k})] - [\omega(\mathbf{k}') - \chi(\mathbf{k}')] \right)^2}{\omega(\mathbf{k})\omega(\mathbf{k}')} \quad (3.217)$$

ist ersichtlich, daß diese Energien genau dann minimiert werden, wenn das Verhalten  $\omega(k) = \chi(k)$  vorliegt. Da sowohl die kinetische Energie  $E_k$  als auch die Coulombenergie  $E_c$  positiv definit sind, garantiert dieses Verhalten  $\omega(k) = \chi(k)$  mit dem Verschwinden der Energien  $E_k = E_c = 0$  eine absolute Minimierung. Diese Argumentation bestätigt somit das prinzipielle Verhalten (3.215) der Yang-Mills-Theorie auch in  $D = 2 + 1$  Dimensionen.

Im folgenden diskutieren wir die physikalischen Konsequenzen, welche sich aus den Behauptungen 1 - 3 ergeben. In diesem Zusammenhang interessieren uns insbesondere Aussagen über die konsistenten Lösungen der Schwinger-Dyson-Integralgleichungen. Wir gehen zunächst einmal von der Annahme aus, der Geistformfaktor sei im infraroten Grenzfall  $k \rightarrow 0$  endlich. Dann divergiert nach Beh. 3 die Krümmung  $\chi(k)$  und nach Gl. (3.215) auch die Gluonenergie  $\omega(k)$  im infraroten Bereich  $k \rightarrow 0$  lediglich mit einem logarithmischen Verhalten  $\omega(k) \sim -\ln k$ . Für dieses Verhalten von  $\omega(k)$  existiert jedoch nach der Beh. 2 keine Lösung für die Integralgleichung (3.200) des Geistformfaktors. Aus diesem Grund kann die konsistente Lösung für den Geistformfaktor  $d(k)$  im infraroten Grenzfall  $k \rightarrow 0$  nicht endlich sein und erfüllt deshalb die bereits beschriebene „horizon condition“ (3.189)

$$d^{-1}(k \rightarrow 0) \rightarrow 0. \quad (3.218)$$

Im Vergleich zur (3+1)-dimensionalen Theorie, in welcher diese Bedingung ad hoc eingeführt wurde, hat die „horizon condition“ in der (2+1)-dimensionalen Theorie die Bedeutung einer Konsistenzbedingung. Die Vernachlässigung der Krümmung  $\chi(k)$  führt auf eine Gluonenergie  $\omega(k)$ , welche im infraroten Grenzfall  $k \rightarrow 0$  gegen einen konstanten Wert strebt. Für ein solches Verhalten von  $\omega(k)$  besitzt jedoch das Integralgleichungssystem, aufgrund der Beh. 2, keine konsistente Lösung.

Diese Tatsache verdeutlicht die zentrale Bedeutung der Krümmung des Konfigurationsraumes im Hinblick auf die Konsistenz des Schwinger-Dyson-Integralgleichungssystems. Diese Untersuchungen der Integralgleichungen zeigen außerdem, daß die konsistente Lösung sowohl einen divergenten Geistformfaktor  $d(k \rightarrow 0) \rightarrow \infty$  als auch eine divergente Gluonenergie  $\omega(k \rightarrow 0) \rightarrow \infty$  im infraroten Bereich beinhaltet und damit in der Lage ist, den Farbeinbruch der Quarks und der Gluonen zu beschreiben.

### 3.6.2 Asymptotisches Verhalten

Durch die Benutzung der bereits im Abschnitt 3.5.1 eingeführten Winkelnäherung erhalten wir Einblick in das Lösungsverhalten der Schwinger-Dyson-Integralgleichungen für den ultravioletten und infraroten Impulsbereich. In der hier vorliegenden Behandlung verwenden wir allerdings die Winkelnäherung lediglich für den Geistformfaktor

$$d(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) = d(k)\Theta(k - q) + d(q)\Theta(q - k) \quad (3.219)$$

und behandeln die restlichen Winkelintegrale exakt. Basierend auf dieser Näherung (3.219) ergibt sich für das Winkelintegral des Geistformfaktors (3.200) und der Krümmung (3.202) der folgende Ausdruck (vgl. (3.116))

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2 \varphi \frac{d(\mathbf{k} - \mathbf{q})}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} &\simeq [\Theta(k - q)d(k) + \Theta(q - k)d(q)] \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\sin^2 \varphi}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} \\ &= \pi \left[ \Theta(k - q) \frac{d(k)}{k^2} + \Theta(q - k) \frac{d(q)}{q^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.220)$$

Damit erhalten wir für die verbleibenden Impulsintegrale der Schwinger-Dyson-Integralgleichungen:

$$I_d(k) = \frac{N_C}{8\pi} \left[ \frac{d(k)}{k^2} \int_0^k dq \frac{q}{\omega(q)} + \int_k^\infty dq \frac{d(q)}{q\omega(q)} \right], \quad (3.221)$$

$$I_\chi(k) = \frac{N_C}{8\pi} \left[ \frac{d(k)}{k^2} \int_0^k dq q d(q) + \int_k^\Lambda dq \frac{d(q)^2}{q} \right]. \quad (3.222)$$

In  $D = 2+1$  Dimensionen ist das Integral  $I_d(k)$  des Geistformfaktors endlich und lediglich das Krümmungsintegral  $I_\chi(k)$  ultraviolett divergent. Die Differentiation dieser Integrale (3.221) und (3.222) nach dem äußeren Impuls führt auf

$$I'_d(k) = \frac{N_C}{8\pi} \frac{1}{k^2} \left[ d'(k) - 2 \frac{d(k)}{k} \right] \int_0^k dq \frac{q}{\omega(q)} \quad (3.223)$$

$$I'_\chi(k) = \frac{N_C}{8\pi} \frac{1}{k^2} \left[ d'(k) - 2 \frac{d(k)}{k} \right] \int_0^k dq q d(q), \quad (3.224)$$

wobei die darin enthaltenen Integrale endlich sind. Damit erhalten wir mit Hilfe der Ableitung der Schwinger-Dyson-Integralgleichung (3.200) für den Geistformfaktor nach dem äußeren Impuls die Differentialgleichung

$$d'(k) \left[ \frac{1}{d(k)^2} - \frac{N_C}{8\pi} \frac{R(k)}{k^2} \right] = -\frac{N_C}{4\pi} \frac{d(k)}{k} \frac{R(k)}{k^2} \quad (3.225)$$

mit dem Integral

$$R(k) = \int_0^k dq \frac{q}{\omega(q)}. \quad (3.226)$$

Analog dazu führt die Ableitung der Krümmung (3.202) auf die Gleichung

$$\chi'(k) = \frac{N_C}{8\pi} \frac{1}{k^2} \left[ d'(k) - 2 \frac{d(k)}{k} \right] S(k) \quad (3.227)$$

mit

$$S(k) = \int_0^k dq q d(q). \quad (3.228)$$

In der folgenden Diskussion betrachten wir die Lösungen der beiden Differentialgleichungen (3.225) und (3.227) im ultravioletten ( $k \rightarrow \infty$ ) und infraroten ( $k \rightarrow 0$ ) Grenzfall.

### Ultraviolettes Verhalten

Im Rahmen der numerischen Untersuchung im Abschnitt 3.6.4 zeigt sich, daß die Gluonenergie  $\omega(k)$  im ultravioletten Bereich ( $k \rightarrow \infty$ ) das asymptotische Verhalten

$$\omega(k) \rightarrow \sqrt{\mathbf{k}^2}, \quad k \rightarrow \infty \quad (3.229)$$

besitzt, welches in Übereinstimmung mit der asymptotischen Freiheit steht. Basierend auf diesem Verhalten von  $\omega(k)$  untersuchen wir im folgenden das ultraviolette Verhalten für den Geistformfaktor  $d(k)$ , die Krümmung  $\chi(k)$  und den Coulombformfaktor  $f(k)$ . Analog zum bereits beschriebenen  $(3 + 1)$ -dimensionalen Fall ist das Integral (3.226) für große äußere Impulse  $k \rightarrow \infty$  unabhängig vom infraroten Verhalten von  $\omega(k)$ , da die Hauptbeiträge zum Integral aus den Bereichen mit großen Integrationsimpulsen  $q$  kommen. Wir erhalten für das asymptotische Verhalten von  $R(k)$  unter Verwendung von (3.229)

$$R(k) = k, \quad k \rightarrow \infty \quad (3.230)$$

und damit für die Differentialgleichung (3.225)

$$\frac{d'(k)}{d(k)^2} \left[ 1 - \frac{N_C}{8\pi} \frac{d(k)^2}{k} \right] = -\frac{N_C}{4\pi} \frac{d(k)}{k^2}. \quad (3.231)$$

Wir gehen an dieser Stelle von der Annahme  $\frac{d(k)^2}{k} \ll 1$  für große Impulse  $k \rightarrow \infty$  aus und können damit den zweiten Term in der Klammer gegenüber der Eins vernachlässigen. Die auf diese Weise vereinfachte Differentialgleichung

$$\frac{d'(k)}{d(k)^2} = -\frac{N_C}{4\pi} \frac{d(k)}{k^2} \quad (3.232)$$

besitzt die Lösung

$$d(k) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{N_C}{8\pi} \frac{1}{k}}}, \quad (3.233)$$

wobei  $c$  eine Integrationskonstante darstellt. Diese Lösung erfüllt für große Impulse  $k \rightarrow \infty$  tatsächlich  $\frac{d(k)^2}{k} \ll 1$  und rechtfertigt damit die oben benutzte Annahme. Für die Bestimmung der Integrationskonstanten  $c$  betrachten wir das Integral  $I_d(k)$  (3.221) in der Winkelnäherung und benutzen im Bereich großer äußerer Impulse  $k \rightarrow \infty$  das asymptotische Verhalten  $\omega(k) \simeq k$  (3.229) und  $d(k) \simeq c$  (3.233). Damit erhalten wir

$$I_d(k) \simeq \frac{N_C}{8\pi} \left[ \frac{c}{k^2} \int_0^k dq \frac{q}{\omega(q)} + c \int_k^\infty dq \frac{1}{q\omega(q)} \right] \simeq \frac{N_C c}{4\pi k} \quad (3.234)$$

und sehen insbesondere, daß das Integral  $I_d(k \rightarrow \infty) \rightarrow 0$  im Grenzfall großer Impulse verschwindet. Mit der Integralgleichung (3.200) für den Geistformfaktor folgt dann  $d(k \rightarrow \infty) \rightarrow 1$  und damit wegen (3.233)  $c = 1$ . Das asymptotische Verhalten des Geistformfaktors ist somit für große Impulse durch

$$d(k) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{N_C}{8\pi} \frac{1}{k}}}, \quad k \rightarrow \infty \quad (3.235)$$

bestimmt und steht in Übereinstimmung mit der Beh. 1 aus Abschnitt 3.6.1. Da der skalierte Geistformfaktor  $d(k)$  in  $2 + 1$  Dimensionen für große Impulse gegen 1 strebt, repräsentiert er damit das Verhalten freier Geistteilchen im ultravioletten Impulsbereich. Mit der in (3.196) eingeführten Skalierung aller relevanten Größen nach der Kopplungskonstanten  $g$  sehen wir, daß der nichtskalierte Geistformfaktor  $\tilde{d}(\tilde{k}) = g d(\frac{\tilde{k}}{g^2})$  ebenso wie im  $(3 + 1)$ -dimensionalen Fall für große Impulse  $k \rightarrow \infty$  asymptotisch gegen die Kopplungskonstante  $g$  strebt.<sup>10</sup>

Um aus dem asymptotischen Verhalten (3.235) mit Hilfe der Swift-Relation (3.75) das Verhalten des Coulombformfaktors  $f(k)$  berechnen zu können, müssen wir den nicht skalierten Geistformfaktor (vgl. (3.196)) verwenden, welcher mit (3.235) und (3.196) durch den Ausdruck

$$\tilde{d}(\tilde{k}) = \frac{g}{\sqrt{1 - \frac{N_C}{8\pi} \frac{g^2}{\tilde{k}}}}, \quad k \rightarrow \infty \quad (3.236)$$

bestimmt ist. Die Anwendung der Swift-Relation (3.75)  $\tilde{f}(\tilde{k}) = -\frac{1}{g^2} \frac{\partial}{\partial g} \frac{1}{\tilde{d}(\tilde{k})}$  führt auf

$$\tilde{f}(\tilde{k}) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{N_C}{8\pi} \frac{g^2}{\tilde{k}}}}, \quad k \rightarrow \infty, \quad (3.237)$$

und somit erhalten wir für den skalierten Coulombformfaktor

$$f(k) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{N_C}{8\pi} \frac{1}{k}}} = d(k), \quad k \rightarrow \infty. \quad (3.238)$$

Dieses asymptotische Verhalten von  $f(k)$  stimmt exakt mit dem des Geistformfaktors überein.

Für die Berechnung des asymptotischen Verhaltens der Krümmung  $\chi(k)$  verwenden wir die Differentialgleichung (3.227) und erhalten mit der für große Impulse  $k$  gültigen Relation (3.232)

$$\chi'(k) = -\frac{N_C}{4\pi} \frac{d(k)}{k^3} \left[ 1 + \frac{N_C}{8\pi} \frac{d(k)^2}{k} \right] S(k). \quad (3.239)$$

<sup>10</sup>Wir bezeichnen vorübergehend in der vorliegenden Diskussion die nicht skalierten Größen mit einer Tilde.

Da im ultravioletten Grenzfall  $d(k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$  und dementsprechend  $\frac{d(k)^2}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$  gilt, können wir diese Gleichung zu

$$\chi'(k) = -\frac{N_C}{4\pi} \frac{1}{k^3} S(k), \quad k \rightarrow \infty \quad (3.240)$$

vereinfachen. Für die Abschätzung des asymptotischen Verhaltens von  $S(k)$  wählen wir einen großen Impuls  $k_0$ , so daß  $d(k)$  für  $k > k_0$  durch  $d(k) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{N_C}{8\pi} \frac{1}{k}}}$  angenähert werden kann.

Damit folgt für  $S(k)$

$$\begin{aligned} S(k) &= \int_0^k dq q d(q) = \int_0^{k_0} dq q d(q) + \int_{k_0}^k dq \frac{q}{\sqrt{1 - \frac{N_C}{8\pi} \frac{1}{q}}} \\ &= C + \frac{k^2}{2} \frac{1}{d(k)} + \frac{3N_C}{32\pi} \frac{k}{d(k)} + \frac{3}{8} \left( \frac{N_C}{8\pi} \right)^2 \ln \left( 2k \left( 1 + \frac{1}{d(k)} \right) - \frac{N_C}{8\pi} \right), \end{aligned} \quad (3.241)$$

wobei  $C$  eine Integrationskonstante darstellt. Für das führende asymptotische Verhalten von  $S(k)$  gilt also

$$S(k \rightarrow \infty) \rightarrow \frac{k^2}{2} \quad (3.242)$$

und damit für genügend große Impulse  $k$

$$\chi'(k) = -\frac{N_C}{8\pi} \frac{1}{k}, \quad k \rightarrow \infty. \quad (3.243)$$

Im ultravioletten Grenzfall ( $k \rightarrow \infty$ ) erhalten wir daher für das Verhalten der Krümmung im Konfigurationsraum

$$\chi(k) \sim \ln \left( \frac{k}{\mu} \right), \quad k \rightarrow \infty \quad (3.244)$$

und insbesondere ein asymptotisch verschwindendes Verhältnis zwischen der Krümmung und der Gluonenergie  $\omega(k)$

$$\frac{\chi(k)}{\omega(k)} \sim \frac{1}{k} \ln \left( \frac{k}{\mu} \right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \quad (3.245)$$

Insgesamt ergibt sich also für die Gluonenergie, den Geist- und Coulombformfaktor sowie die skalare Krümmung im ultravioletten Grenzfall ( $k \rightarrow \infty$ ) das folgende asymptotische Verhalten

$$\begin{aligned} \omega(k) &= k \\ d(k) &= f(k) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{N_C}{8\pi} \frac{1}{k}}}, \\ \frac{\chi(k)}{\omega(k)} &\sim \frac{1}{k} \ln \left( \frac{k}{\mu} \right). \end{aligned} \quad (3.246)$$

Analog zum  $(3 + 1)$ -dimensionalen Fall repräsentiert die Gluonenergie  $\omega(k) = k$  und der Geistformfaktor  $d(k \rightarrow \infty) \rightarrow 1$  das Verhalten freier Gluonen und Geistteilchen für hohe Energien. Dieses Verhalten steht in Übereinstimmung mit den Vorstellungen der asymptotischen Freiheit. Das im Grenzfall hoher Impulse verschwindende Verhältnis zwischen der Krümmung  $\chi(k)$  und der Gluonenergie  $\omega(k)$  verdeutlicht den Übergang des gekrümmten Konfigurationsraumes in einen flachen Raum bei großen Energien.

### Infrarotes Verhalten

Die Untersuchung der Lösungen der gekoppelten Schwinger-Dyson-Integralgleichungen im infraroten Grenzfall  $k \rightarrow 0$  verläuft völlig analog zu der bereits für  $D = 3 + 1$  dargestellten Vorgehensweise. Basierend auf den Infrarotansätzen

$$\omega(k) = \frac{A}{k^\alpha}, \quad d(k) = \frac{B}{k^\beta}, \quad \chi(k) = \frac{C}{k^\gamma} \quad (3.247)$$

können wir die verbleibenden Integrale  $R(k)$  (3.226) und  $S(k)$  (3.228) berechnen und erhalten unter Verwendung der Differentialgleichung für den Geistformfaktor

$$\frac{d'(k)}{d(k)^2} = I'_d(k) \quad (3.248)$$

die Relation

$$\frac{A}{B^2} = \frac{N_C}{8\pi} \frac{\beta + 2}{\beta(\alpha + 2)} k^{\alpha - 2\beta}. \quad (3.249)$$

Diese Gleichung impliziert einen Zusammenhang zwischen den Infrarotexponenten der Gluonen und Geister

$$\alpha = 2\beta \quad (3.250)$$

und führt somit zu dem folgenden Zusammenhang der beiden Infrarotkoeffizienten  $A$  und  $B$

$$\frac{A}{B^2} = \frac{N_C}{8\pi} \frac{\beta + 2}{2\beta(\beta + 1)}. \quad (3.251)$$

Die Anwendung dieser Vorgehensweise auf die Ableitung der Krümmungsfunktion (3.202) nach dem äußeren Impuls  $k$

$$\chi'(k) = I'_\chi(k) \quad (3.252)$$

führt auf die Bedingung

$$\frac{C}{B^2} = \frac{N_C}{8\pi} \frac{\beta + 2}{\gamma(2 - \beta)} k^{\gamma - 2\beta} \quad (3.253)$$

und impliziert damit die Relation

$$\gamma = 2\beta \quad (3.254)$$

für die Infrarotexponenten  $\gamma$  und  $\beta$ , sowie den Zusammenhang

$$\frac{C}{B^2} = \frac{N_C}{8\pi} \frac{\beta + 2}{2\beta(2 - \beta)} \quad (3.255)$$

zwischen den Infrarotkoeffizienten. Die Kombination der Gleichungen (3.250) und (3.254) führt auf

$$\alpha = \gamma = 2\beta \quad (3.256)$$

und zeigt die Übereinstimmung des asymptotischen Verhaltens ( $k \rightarrow 0$ ) der Gluonenergie  $\omega(k)$  mit dem der Krümmung  $\chi(k)$ . Für den Zusammenhang zwischen den Infrarotkoeffizienten  $A$  und  $C$  erhalten wir aus den Gleichungen (3.251) und (3.255)

$$\frac{A}{C} = \frac{(2 - \beta)}{(1 + \beta)}. \quad (3.257)$$

Ein Ergebnis der analytischen Untersuchungen im Abschnitt 3.6.1 war die Übereinstimmung des asymptotischen Verhaltens der Krümmung und der Gluonenergie im Grenzfall  $k \rightarrow 0$

$$\omega(k \rightarrow 0) = \chi(k \rightarrow 0). \quad (3.258)$$

Da dieser Zusammenhang insbesondere  $A = C$  impliziert, folgt zum einen aus der Relation (3.257)  $\beta = \frac{1}{2}$  und zum anderen aus (3.256)  $\alpha = \gamma = 1$ .

Insgesamt erhalten wir damit für das Lösungsverhalten im infraroten Grenzfall

$$\omega(k) = \chi(k) = \frac{A}{k}, \quad (3.259)$$

$$d(k) = \sqrt{\frac{24\pi A}{5N_C}} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}}. \quad (3.260)$$

Dieses infrarote Verhalten des Geistformfaktors  $d(k) \sim \frac{1}{\sqrt{k}}$  führt zu einem exakt ansteigenden, nicht-abelschen Coulombpotential, wenn wir für das infrarote Verhalten der Coulombformfunktion  $f(k)$  (3.201) den führenden Term  $f(k \rightarrow 0) = 1$  zugrunde legen.

### 3.6.3 Renormierung der Schwinger-Dyson-Integralgleichungen

Im Gegensatz zur  $(3 + 1)$ -dimensionalen Yang-Mills-Theorie sind in  $D = 2 + 1$  Dimensionen die Integrale der Schwinger-Dyson-Gleichungen für den Geistformfaktor (3.200) und den Coulombformfaktor (3.201) endlich und benötigen somit keine Renormierung. Ferner ist die Kopplungskonstante  $g$  in der hier diskutierten  $(2 + 1)$ -dimensionalen Theorie dimensionsbehaftet und insbesondere unabhängig von einem „Impuls-Cutoff“.

Die Integralgleichung (3.202) für die Krümmung  $\chi(k)$  enthält dagegen ein im ultravioletten Bereich logarithmisch divergentes Integral. Wir renormieren diese Integralgleichung analog zur Behandlung in  $D = 3 + 1$  Dimensionen durch die Anwendung der minimalen Subtraktion bezüglich einer beliebig wählbaren Renormierungsskala  $\mu$  und erhalten damit

$$\chi(k) = \chi(\mu) + \Delta I_\chi(k) \quad (3.261)$$

mit der Differenz

$$\Delta I_\chi(k) = I_\chi(k, \Lambda) - I_\chi(\mu, \Lambda), \quad (3.262)$$

welche im Grenzfall  $\Lambda \rightarrow \infty$  endlich ist.

Die Renormierung der  $(2 + 1)$ -dimensionalen Gluonengleichung (3.197) erfolgt in derselben Weise wie in  $D = 3 + 1$  Dimensionen. Daher können wir die im Abschnitt 3.5.2 ausführlich diskutierte Renormierung der Gluonengleichung einfach übernehmen und erhalten dann für die renormierte Gluonengleichung in  $2 + 1$  Dimensionen

$$\begin{aligned} \omega(k)^2 = & k^2 + \chi(k)^2 + \omega(\mu)^2 - \mu^2 - \chi(\mu)^2 + \left[ I_\omega^{(2)}(k, \Lambda) - I_\omega^{(2)}(\mu, \Lambda) \right] \\ & + 2\chi(k) \left[ I_\omega^{(1)}(k, \Lambda) - I_\omega^{(1)}(\mu, \Lambda) \right] + 2[\chi(k) - \chi(\mu)] I_\omega^{(1)}(\mu) \end{aligned} \quad (3.263)$$

mit den Integralen

$$I_\omega^{(n)}(k, \Lambda) = \frac{N_C}{2} \int^\Lambda \frac{d^2q}{(2\pi)^2} (\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{q}})^2 \cdot \frac{d(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2 f(\mathbf{k}-\mathbf{q})}{(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2} \cdot \frac{[\omega(\mathbf{q}) - \chi(\mathbf{q})]^n - [\omega(\mathbf{k}) - \chi(\mathbf{k})]^n}{\omega(\mathbf{q})}. \quad (3.264)$$

Die in der Gluongleichung (3.263) auftretenden Differenzintegrale  $I_\omega^{(n)}(k, \Lambda) - I_\omega^{(n)}(\mu, \Lambda)$  sind für den Grenzfall  $\Lambda \rightarrow \infty$  endlich. Wie bereits im Abschnitt 3.5.2 diskutiert, bezeichnet  $I_\omega^{(1)}(\mu)$  den endlichen Anteil von  $I_\omega^{(1)}(\mu)$ . Zusammen mit der renormierten Krümmungsfunktion (3.261) erhalten wir dann für die Gluongleichung

$$\begin{aligned} \omega(k)^2 = k^2 - \mu^2 + \Delta I_\chi(k)^2 + \xi \Delta I_\chi(k) + \left[ I_\omega^{(2)}(k, \Lambda) - I_\omega^{(2)}(\mu, \Lambda) \right] \\ + 2 [\chi(\mu) + \Delta I_\chi(k)] \left[ I_\omega^{(1)}(k, \Lambda) - I_\omega^{(1)}(\mu, \Lambda) \right] + \omega(\mu)^2 \end{aligned} \quad (3.265)$$

mit der Renormierungskonstanten

$$\xi = 2 \left[ \chi(\mu) + I_\omega^{(1)}(\mu) \right]. \quad (3.266)$$

Insgesamt enthalten die renormierten Schwinger-Dyson-Integralgleichungen für die Krümmung (3.261) und die Gluonenergie (3.265) die drei Renormierungskonstanten  $\chi(\mu)$ ,  $\omega(\mu)$  und  $\xi = 2 \left[ \chi(\mu) + I_\omega^{(1)}(\mu) \right]$ , welche grundsätzlich Einfluß auf die Eigenschaften der Lösungen haben. Obwohl zunächst drei Renormierungskonstanten vorliegen, können jedoch lediglich zwei davon in beliebiger Weise vorgegeben werden. Die dritte Renormierungskonstante – üblicherweise  $\omega(\mu)$  – muß so fixiert werden, daß die „horizon condition“ (3.218) erfüllt wird, da ansonsten keine konsistente Lösung existiert. Im Rahmen der folgenden numerischen Untersuchung der konsistenten Lösungen werden wir den Einfluß der beiden verbleibenden Renormierungskonstanten  $\chi(\mu)$  und  $\xi$  diskutieren und insbesondere zeigen, daß weder das infrarote noch das ultraviolette Lösungsverhalten von diesen Renormierungskonstanten beeinflusst wird.

### 3.6.4 Numerische Ergebnisse

Im vorliegenden Abschnitt diskutieren wir die konsistenten Lösungen der gekoppelten Schwinger-Dyson-Integralgleichungen für die Gluonenergie  $\omega(k)$  (3.265), den Geistformfaktor  $d(k)$  (3.200), den Coulombformfaktor  $f(k)$  (3.201) und die skalare Krümmung  $\chi(k)$  (3.261). Aufgrund der Skalierung nach der Kopplungskonstanten  $g$  (3.196) sind einerseits alle relevanten Funktionen dimensionslos, und zum anderen besitzen die Integralgleichungen keine Abhängigkeit mehr von der Kopplungskonstanten  $g$  als Parameter.

Wie bereits im letzten Abschnitt diskutiert, müssen wir im folgenden die drei in den Schwinger-Dyson-Integralgleichungen verbleibenden Renormierungskonstanten

$$\xi, \chi(\mu), \omega(\mu) \quad (3.267)$$

an einem beliebigen Renormierungspunkt  $\mu$  fixieren. Dabei sind die ersten beiden Konstanten  $\xi$  und  $\chi(\mu)$  zunächst einmal frei wählbar. Im Gegensatz zur  $D = 3 + 1$  dimensionalen Theorie, in welcher die „horizon condition“ (3.218) durch die geeignete Wahl der Renormierungskonstanten  $d(\mu)$  eingeführt wurde, hat diese Bedingung in  $D = 2 + 1$  Dimensionen die

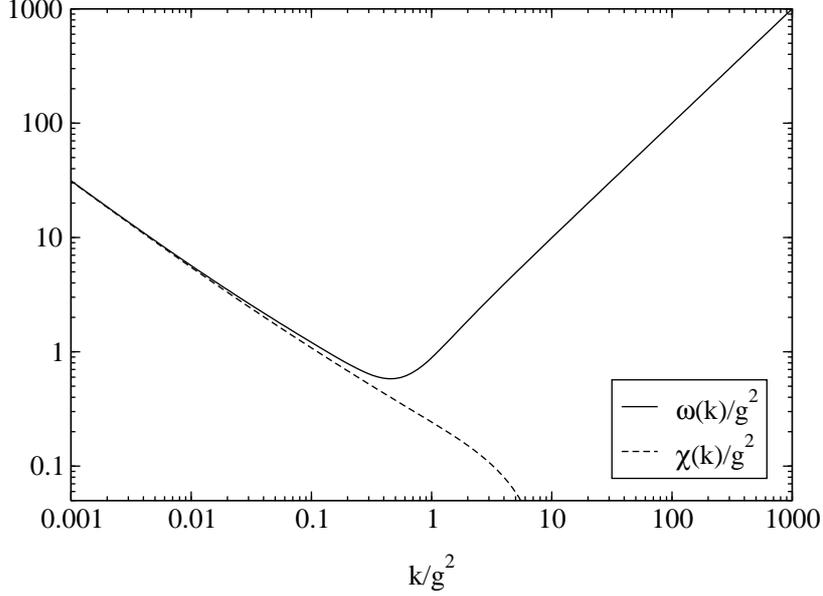


Abbildung 3.14: Konsistente Lösung für die Gluonenergie  $\omega(k)$  und die Krümmung  $\chi(k)$  für  $\xi = 2.0g^2$  und  $\lambda(\mu) = 0.5g^2$ .

Bedeutung einer Konsistenzbedingung. Aufgrund dessen muß der Lösungsalgorithmus die dritte Renormierungskonstante  $\omega(\mu)$  so fixieren, daß die „horizon condition“ (3.218)

$$d^{-1}(k \rightarrow 0) \rightarrow 0$$

als Konsistenzbedingung erfüllt wird. Andernfalls existiert aufgrund der analytischen Untersuchung im Abschnitt 3.6.1 keine konsistente Lösung. Damit können also lediglich die beiden Renormierungskonstanten  $\xi$  und  $\chi(\mu)$  in beliebiger Weise vorgegeben werden.

Das Schwinger-Dyson-Integralgleichungssystem wird im Rahmen der numerischen Genauigkeit mit einem speziell dafür konzipierten, gekoppelten Algorithmus gelöst. Um in konsistenter Weise die Berechnung der Integralgleichungen innerhalb des Einschleifenniveaus zu behandeln, lösen wir völlig analog zur  $D = 3 + 1$  dimensionalen Behandlung die Integralgleichung (3.201) für den Coulombformfaktor  $f(k)$  unter Verwendung des nackten Geistformfaktors  $d(k) = 1$ . In den Abb. 3.14 und 3.15 sind die selbstkonsistenten Lösungen der Integralgleichungen für die Wahl der Renormierungskonstanten  $\xi = 2.0g^2$  und  $\lambda(\mu) = 0.5g^2$  am Renormierungspunkt  $\mu = 0.321g^2$  dargestellt.

Im folgenden untersuchen wir zunächst die Abhängigkeit der konsistenten Lösungen von den verbleibenden, frei wählbaren Renormierungskonstanten  $\xi$  und  $\chi(\mu)$ . Die Abb. 3.16 und 3.17 zeigen die konsistenten Lösungen bei der Variation von  $\xi$  im Intervall  $[1.0, 3.0]g^2$  für einen festen Wert von  $\chi(\mu) = 0.5g^2$ . Die Renormierungskonstante  $\xi$  hat lediglich einen leichten Einfluß im mittleren Impulsbereich, verändert jedoch weder das infrarote noch das ultraviolette Verhalten der konsistenten Lösungen. Die Variation der anderen Renormierungskonstanten  $\chi(\mu)$  im Bereich  $[-1.5, 0.5]g^2$  für den festen Wert  $\xi = 2.0g^2$ , dargestellt in den Abb. 3.18 und 3.19, hat praktisch keinen Einfluß auf das Lösungsverhalten.

Die in der Abb. 3.14 dargestellte konsistente Lösung für die Gluonenergie  $\omega(k)$  divergiert asymptotisch im Grenzfall  $k \rightarrow 0$  und wird im infraroten Bereich durch den Verlauf

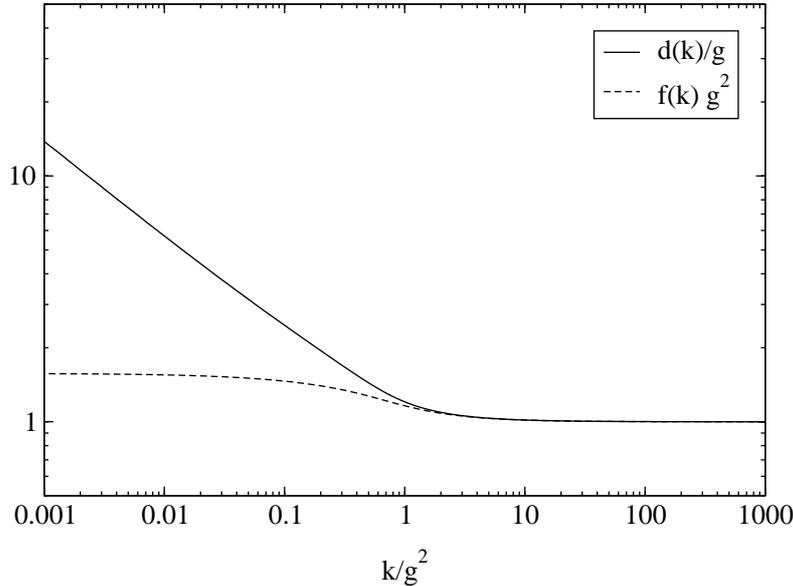


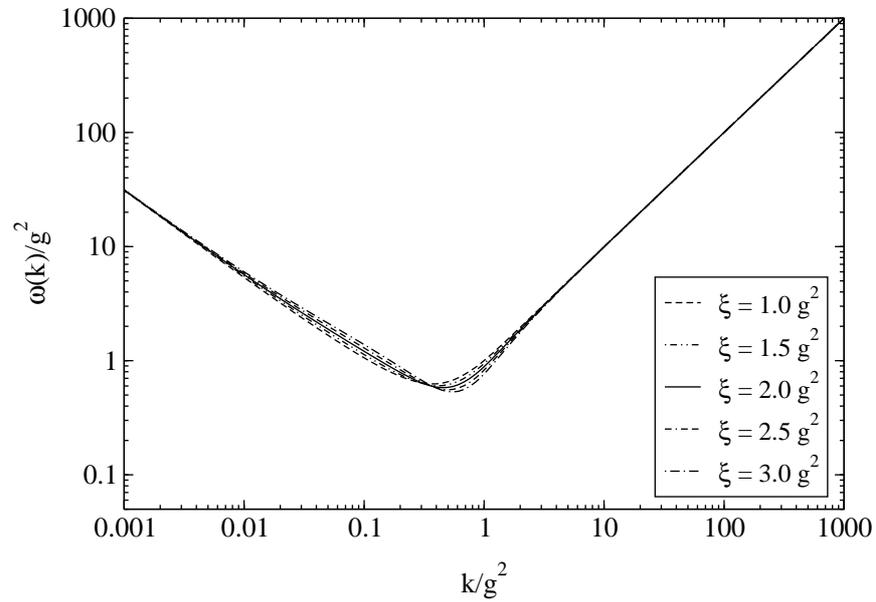
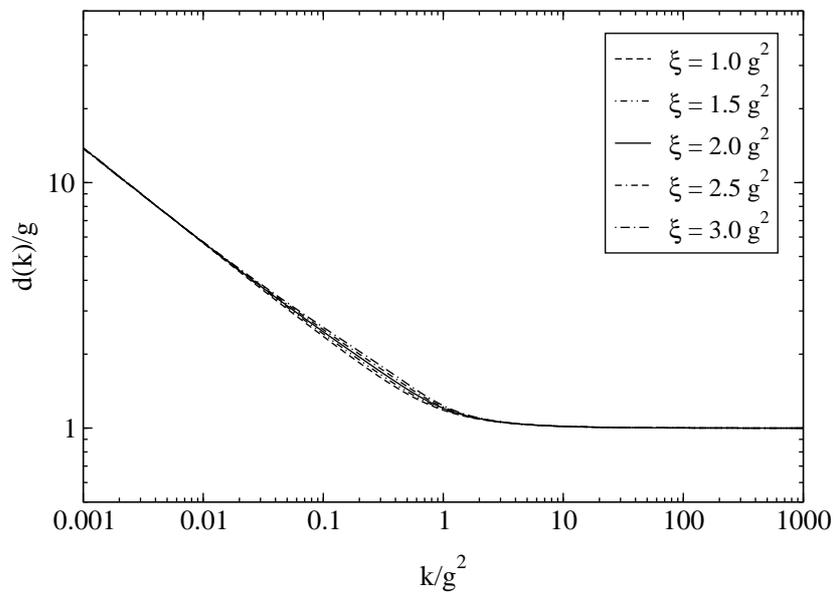
Abbildung 3.15: Konsistente Lösung für den Geistformfaktor  $d(k)$  und den Coulombformfaktor  $f(k)$  für  $\xi = 2.0g^2$  und  $\lambda(\mu) = 0.5g^2$ .

der Krümmung  $\chi(k)$  bestimmt. Dieses Verhalten repräsentiert die Dominanz der Krümmung im Konfigurationsraum für den Niederenergiesektor der Theorie und bewirkt insbesondere das Verschwinden des Gluonpropagators  $\frac{1}{2\omega(k)}$  im infraroten Grenzfall  $k \rightarrow 0$  und damit den Farbeinschluß der Gluonen. Für große Impulse  $k \rightarrow \infty$  hat die Gluonenergie mit  $\omega(k) \sim k$  das Verhalten eines nicht wechselwirkenden, freien Bosons, und die Krümmung des Konfigurationsraumes verschwindet asymptotisch mit  $\frac{\chi(k)}{\omega(k)} \sim \frac{1}{k} \ln\left(\frac{k}{\mu}\right)$ . Dieses Lösungsverhalten steht in Einklang mit dem Verhalten der asymptotischen Freiheit. Im Vergleich dazu besitzt die in der Abb. 3.15 dargestellte konsistente Lösung für den Geistformfaktor  $d(k)$  im infraroten Bereich ( $k \rightarrow 0$ ) ein divergentes Verhalten und strebt im ultravioletten Bereich ( $k \rightarrow \infty$ ) gegen Eins. Damit repräsentiert diese Lösung das Verhalten freier Geistteilchen für große Energien.

Die Krümmung im Konfigurationsraum ist von zentraler Bedeutung, da sie die physikalischen Eigenschaften im infraroten Bereich der Theorie nahezu vollständig bestimmt. Im Gegensatz zur  $(3+1)$ -dimensionalen Yang-Mills-Theorie existiert ohne die vollständige Implementierung der Krümmung keine konsistente Lösung des Schwinger-Dyson-Integralgleichungssystems (vgl. Abschnitt 3.6.1).

Basierend auf diesen numerischen Ergebnissen können wir in analoger Weise zum  $(3+1)$ -dimensionalen Fall (vgl. Abschnitt 3.5.4) das nicht-abelsche Coulombpotential berechnen. Dieses Potential zwischen zwei statischen Quarks ist durch den Ausdruck (3.193)

$$V(\mathbf{r}) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{d(k)^2 f(k)}{k^2} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} V(k) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$$

Abbildung 3.16: Gluonenergie  $\bar{\omega}(k)$  für  $\lambda(\mu) = 0.5g^2$ .Abbildung 3.17: Geistformfaktor  $d(k)$  für  $\lambda(\mu) = 0.5g^2$ .

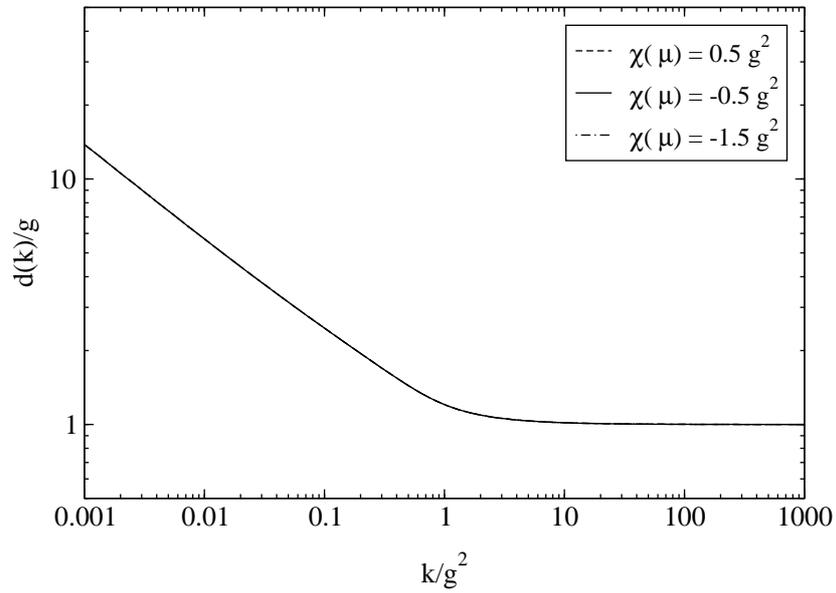


Abbildung 3.18: Geistformfaktor  $d(k)$  für  $\xi = 2.0g^2$ .

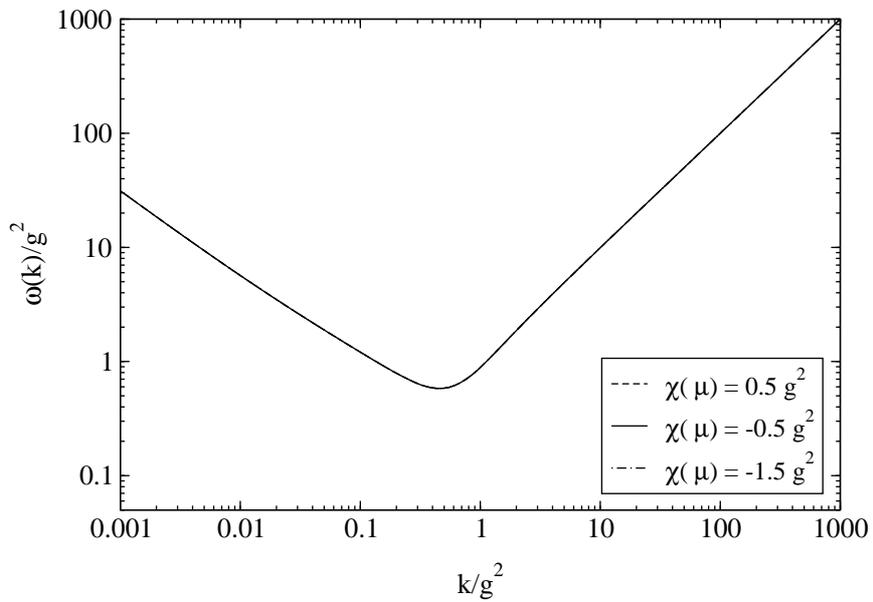


Abbildung 3.19: Gluonenergie  $\bar{\omega}(k)$  für  $\xi = 2.0g^2$ .

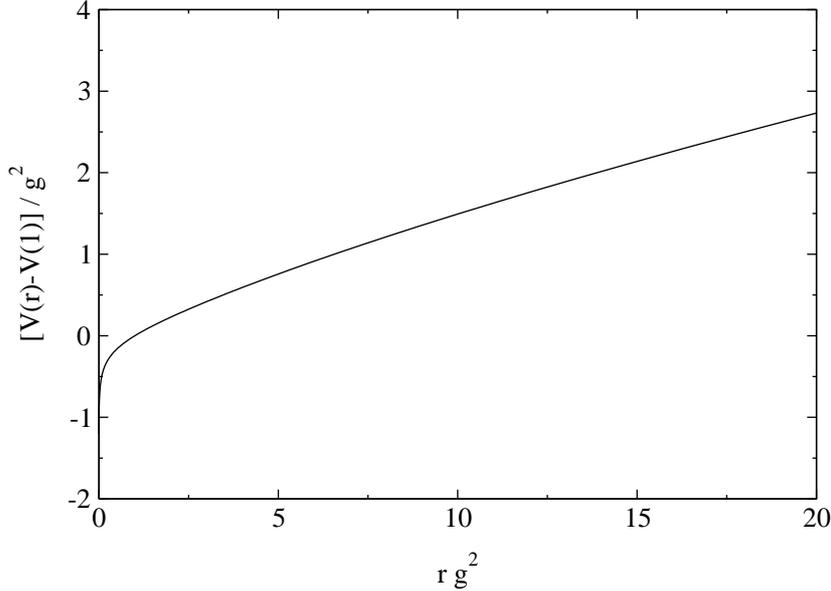


Abbildung 3.20: Nicht-abelsches Coulombpotential für  $\xi = 2.0g^2$  und  $\lambda(\mu) = 0.5g^2$ .

gegeben und hat nach der analytisch durchgeführten Winkelintegration die Form

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk \frac{d(k)^2 f(k)}{k^2} J_0(kr), \quad (3.268)$$

wobei  $J_0(x)$  die Besselfunktion 0-ter Ordnung darstellt. Das im Abschnitt 3.6.2 gefundene asymptotische Verhalten im infraroten Bereich,  $d(k \rightarrow 0) \sim \frac{1}{\sqrt{k}}$  und  $f(k \rightarrow 0) = \text{const.}$ , führt auf  $V(k) \sim \frac{1}{k^3}$  und damit auf ein exakt linear ansteigendes Coulombpotential. Für große Impulse erhalten wir, basierend auf  $d(k \rightarrow \infty) = 1$  und  $f(k \rightarrow \infty) = 1$ , das übliche Verhalten  $V(k) \sim \frac{1}{k^2}$  und somit das in  $D = 2 + 1$  Dimensionen übliche  $\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$ -Verhalten für kleine Abstände.

Das Ergebnis einer numerischen Berechnung des nicht-abelschen Coulombpotentials unter Verwendung der konsistenten Lösungen ist in Abb. 3.20 dargestellt. Dabei ergibt die genaue numerische Analyse für das infrarote Verhalten  $V(k) \sim \frac{1}{k^{2.9}}$  anstelle von  $\frac{1}{k^3}$ , welches für ein exakt linear ansteigendes Potential benötigt wird.

### 3.7 Zusammenfassung

In diesem Kapitel haben wir die funktionale Yang-Mills-Schrödingergleichung unter Verwendung eines Variationsprinzips für  $D = 3 + 1$  und  $D = 2 + 1$  Dimensionen gelöst. Diese Berechnungen basieren auf einem physikalisch motivierten Ansatz für das Wellenfunktional des Vakuums, welcher am Gribov-Horizont divergent ist und damit die Tatsache berücksichtigt, daß die dominanten Infrarotfreiheitsgrade, wie etwa Zentrumswirbel, auf dem Gribov-Horizont lokalisiert sind. Mit diesem Ansatz für das Wellenfunktional berechneten wir, im Rahmen einer Entwicklung nach dem vollen Faddeev-Popov-Propagator, die Yang-Mills-Vakuumenergie bis

zur Zweischleifenordnung. Die Minimierung dieser Vakuumenergie führte auf ein gekoppeltes, nichtlineares System von Schwinger-Dyson-Integralgleichungen für die Gluonenergie, den Geist- und Coulombformfaktor und die Krümmung im Konfigurationsraum. Diese Schwinger-Dyson-Gleichungen wurden unter Benutzung der Winkelnäherung sowohl für  $D = 3 + 1$  als auch für  $D = 2 + 1$  Dimensionen im infraroten und ultravioletten Grenzfall analytisch gelöst. Dabei ergab sich im ultravioletten Grenzfall das bereits bekannte asymptotische Verhalten aus der Störungstheorie. Im infraroten, also dem nicht-perturbativen Bereich, fanden wir eine divergierende Gluonenergie und damit die Abwesenheit freier Gluonen bei kleinen Energien. Dieses Ergebnis deutet auf den Farbeinschluß der Gluonen hin. Der Geistformfaktor zeigt im infraroten Grenzfall ebenfalls ein divergentes Verhalten und bewirkt damit ein für große Abstände linear ansteigendes statisches Quarkpotential. Das analytisch berechnete, asymptotische Lösungsverhalten im infraroten ( $k \rightarrow 0$ ) und im ultravioletten ( $k \rightarrow \infty$ ) Grenzfall steht in guter Übereinstimmung mit der vollen, numerischen Lösung der Schwinger-Dyson-Gleichungen. Insbesondere zeigen unsere Untersuchungen, daß die vollständige Implementierung der Krümmung des Konfigurationsraumes, welche durch den Faddeev-Popov-Operator zum Ausdruck kommt, von zentraler Bedeutung für die Eigenschaften des Farbeinschlusses ist. Eine Vernachlässigung dieser Krümmung in  $D = 3 + 1$  Dimensionen führt zu einem völlig anderen Infrarotverhalten und insbesondere zum Verlust des Farbeinschlusses der Gluonen und Quarks. Im Vergleich dazu hat die Vernachlässigung der Krümmung in der  $D = 2 + 1$  dimensionalen Yang-Mills-Theorie noch drastischere Auswirkungen – denn ohne die Krümmung im Konfigurationsraum existiert keine konsistente Lösung des gekoppelten Schwinger-Dyson-Integralgleichungssystems.



## Kapitel 4

# Das Wellenfunktional des Yang-Mills-Vakuums

### 4.1 Gribovs Szenario zum Farbeinschluß

Mit Hilfe der in Kapitel 3 durchgeführten Variationsbehandlung der funktionalen Yang-Mills-Schrödingergleichung können wir den Farbeinschluß sowohl der Quarks als auch der Gluonen innerhalb der nicht-abelschen Yang-Mills-Theorie beschreiben. Da in diesem Zusammenhang die Krümmung im Konfigurationsraum von zentraler Bedeutung ist, spielen insbesondere diejenigen Feldkonfigurationen des Eichfeldes, welche am Gribov-Horizont lokalisiert sind, eine besondere Rolle.

Die Vorstellungen über den Mechanismus, welcher für den Farbeinschluß und damit insbesondere für den linearen Anstieg des statischen, nicht-abelschen Coulombpotentials (3.192)

$$V^{ab}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \left\langle \left[ \left( -\partial_i \hat{D}_i(A^\perp) \right)^{-1} (-\Delta) \left( -\partial_j \hat{D}_j(A^\perp) \right)^{-1} \right]_{\mathbf{xy}}^{ab} \right\rangle_\Psi \quad (4.1)$$

bei großen Abständen  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  verantwortlich ist, basieren auf den Arbeiten von Gribov [31] und Zwanziger [46]. Wie bereits im Abschnitt 2.4 diskutiert, sind innerhalb der Coulombbeziehung die möglichen Feldkonfigurationen der Eichfelder zunächst einmal auf die sogenannte Gribovregion  $\Omega$  beschränkt, welche diejenigen Konfigurationen  $A^\perp$  enthält, für die der Faddeev-Popov-Operator  $-\partial_i \hat{D}_i(A^\perp)$  ausschließlich positive Eigenwerte besitzt.<sup>1</sup> Auf dem Gribov-Horizont  $\partial\Omega$ , dem Rand der Gribovregion, hat der Faddeev-Popov-Operator zumindest einen Eigenvektor mit Eigenwert Null, und damit verschwindet auf diesem Horizont die Faddeev-Popov-Determinante  $\mathcal{J}[A^\perp] = \det(-\partial_i \hat{D}_i(A^\perp)) = 0$ . Da innerhalb der Gribovregion  $\Omega$  immer noch Eichkopien des transversalen Eichfeldes existieren, müssen die möglichen Feldkonfigurationen auf die FMR  $\Lambda$  weiter eingeschränkt werden. Die entscheidende Eigenschaft der FMR besteht nun darin, daß sie den Gribov-Horizont berührt und damit Eichkonfigurationen  $A^\perp$  enthält, für die der Faddeev-Popov-Operator zumindest einen Eigenvektor mit verschwindendem Eigenwert hat. Aufgrund der großen Dimension des Konfigurationsraumes ist ein Großteil der Feldkonfigurationen in unmittelbarer Nähe des Gribov-Horizontes lokalisiert [53]. Da der Faddeev-Popov-Operator für diese Konfigurationen nahezu verschwindende

---

<sup>1</sup>Für transversale Eichfelder  $A^\perp$  ist der Faddeev-Popov-Operator  $-\partial_i \hat{D}_i(A^\perp)$  symmetrisch, und somit gilt beispielsweise in der Ortsdarstellung  $\langle \mathbf{xa} | -\partial_i \hat{D}_i(A^\perp) | \mathbf{yb} \rangle = \langle \mathbf{yb} | -\partial_i \hat{D}_i(A^\perp) | \mathbf{xa} \rangle$ .

Eigenwerte besitzt, bewirken Eichfelder am Gribov-Horizont eine wesentliche Verstärkung des nicht-abelschen Coulombpotentials (4.1) und führen damit zu einem Potentialanstieg<sup>2</sup> für große Abstände  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  zwischen zwei statischen Farbladungen.

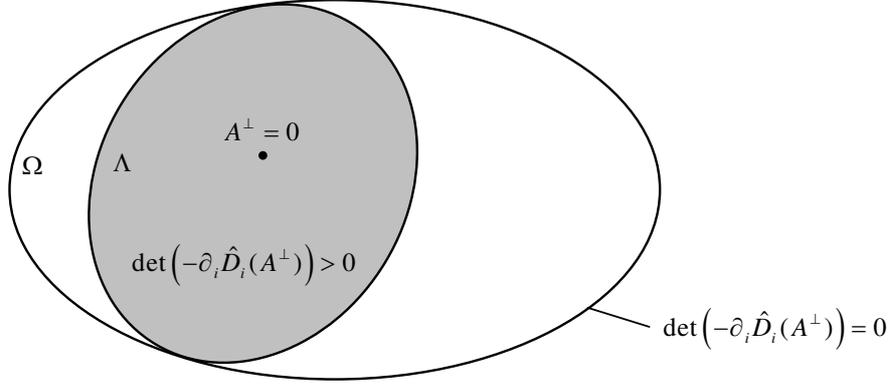


Abbildung 4.1: Gribovregion  $\Omega$ , Gribov-Horizont und FMR  $\Lambda$  im Konfigurationsraum der transversalen Eichfelder  $A^\perp$ .

In Übereinstimmung mit dieser Vorstellung bewirken die Feldkonfigurationen  $A^\perp$  am Gribov-Horizont eine starke Erhöhung der in (3.81) und (3.82) eingeführten Krümmungsfunktion

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= -\frac{1}{2} \left\langle \frac{\delta^2 \ln \mathcal{J}}{\delta A^\perp(\mathbf{x}) \delta A^\perp(\mathbf{x}')} \right\rangle_\Psi \\ &= -\text{Tr} \left[ \left\langle \left( -\partial_i \hat{D}_i(A^\perp) \right)^{-1} \right\rangle_\Psi \Gamma(\mathbf{x}) \left\langle \left( -\partial_j \hat{D}_j(A^\perp) \right)^{-1} \right\rangle_\Psi \Gamma^0(\mathbf{x}') \right] \end{aligned} \quad (4.2)$$

und verursachen damit die im Rahmen der Variationsbehandlung im Kapitel 3 diskutierte Dominanz der Krümmung für das nicht-perturbative Verhalten der Theorie.

Der für die Berechnungen im Kapitel 3 zugrundeliegende Ansatz für das Wellenfunktional (3.34)

$$\Psi[A^\perp] = \mathcal{N} \mathcal{J}^{-\frac{1}{2}}[A^\perp] \exp \left[ -\frac{1}{2} \int d^d x \int d^d x' A_i^{\perp a}(\mathbf{x}) \omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}') A_i^{\perp a}(\mathbf{x}') \right] \quad (4.3)$$

ist für Eichfelder  $A^\perp$  mit  $\mathcal{J}[A^\perp] = 0$  divergent und bewirkt damit eine hohe Wahrscheinlichkeitsamplitude für Feldkonfigurationen, welche am Gribov-Horizont lokalisiert sind und die bekanntlich für das nicht-perturbative Verhalten verantwortlich sind. Konkret stellt sich in diesem Zusammenhang die Frage, in welcher Weise die spezielle Wahl des Ansatzes für den Yang-Mills-Vakuumzustand das im Kapitel 3 gefundene Lösungsverhalten im infraroten Bereich und damit die Eigenschaften des Farbeinschlusses beeinflusst. Welches Infrarotverhalten würde beispielsweise bei Verwendung des Ansatzes

$$\Psi[A^\perp] = \mathcal{N} \exp \left[ -\frac{1}{2} \int d^d x \int d^d x' A_i^{\perp a}(\mathbf{x}) \omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}') A_i^{\perp a}(\mathbf{x}') \right], \quad (4.4)$$

<sup>2</sup>Dieser Potentialanstieg ist wegen der Ungleichung (2.99) mindestens linear.

welcher am Gribov-Horizont endlich ist und damit eine völlig andere Wahrscheinlichkeitsverteilung der Feldkonfigurationen am Gribov-Horizont im Vergleich zu (4.3) besitzt, resultieren?<sup>3</sup> Um diese wichtige Fragestellung zu beantworten, gehen wir von einem verallgemeinerten Ansatz für das Vakuumwellenfunktional aus, welcher insbesondere die beiden Ansätze (4.3) und (4.4) als Spezialfall enthält. Basierend auf diesem allgemeineren Ansatz führen wir zunächst die Berechnung und Minimierung der Vakuumenergie durch und diskutieren anschließend sowohl das nicht-perturbative Verhalten der Theorie als auch das Wellenfunktional im infraroten Bereich.

Diese Untersuchungen innerhalb des vorliegenden Kapitels 4 basieren auf der Arbeit [54].

## 4.2 Vakuumansatz

Für die Untersuchung der in der Einleitung 4.1 diskutierten Fragestellung verwenden wir als Ansatz für den Vakuumzustand der Yang-Mills-Theorie das verallgemeinerte Wellenfunktional

$$\Psi[A^\perp] = \mathcal{J}^{-\alpha}[A^\perp]\phi[A^\perp], \quad (4.5)$$

welches insbesondere die beiden Ansätze (4.3) und (4.4) als Spezialfall beinhaltet. Dabei repräsentieren

$$\mathcal{J}[A^\perp] = \frac{\det\left(-\partial_i \hat{D}_i(A^\perp)\right)}{\det(-\partial^2)} \quad (4.6)$$

die auf  $\mathcal{J}[A^\perp = 0] = 1$  normierte Faddeev-Popov-Determinante, und

$$\begin{aligned} \phi[A^\perp] &= \mathcal{N} \exp(-S[A^\perp]) \\ S[A^\perp] &= \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3x' A_i^{\perp a}(\mathbf{x}) \omega_{ij}^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') A_j^{\perp b}(\mathbf{x}') \end{aligned} \quad (4.7)$$

den Gaußschen Anteil des Wellenfunktionals (4.5). Die darin enthaltene Normierungskonstante

$$\mathcal{N}(\alpha, \omega) = \left[ \int_{\Lambda} \mathcal{D}A^\perp \mathcal{J}[A^\perp]^{1-2\alpha} \exp(-2S[A^\perp]) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (4.8)$$

garantiert  $\langle \Psi | \Psi \rangle = 1$  und ist prinzipiell von den beiden Variationsparametern  $\omega$  und  $\alpha$  abhängig.

Für die Potenz  $\alpha$  der Faddeev-Popov-Determinante im verallgemeinerten Wellenfunktional (4.5) kommt grundsätzlich jeder reelle Wert in Frage, solange das Wellenfunktional dabei auf  $\langle \Psi | \Psi \rangle = 1$  normierbar bleibt. Durch diese allgemeine Potenz der Faddeev-Popov-Determinante enthält der vorliegende Ansatz (4.5) verschiedene Wellenfunktionale, welche eine höchst unterschiedliche Gewichtung der Feldkonfigurationen am Gribov-Horizont beinhalten, die wiederum für die nicht-perturbativen Eigenschaften der Theorie entscheidend sind. Beispielsweise besitzt das für die Variationsbehandlung im Kapitel 3 zugrundeliegende Wellenfunktional (3.34) mit  $\alpha = \frac{1}{2}$  im Vergleich zu einem Wellenfunktional mit  $\alpha = 0$  eine völlig

<sup>3</sup>Ein solcher Ansatz wurde in [21] untersucht.

andere Wahrscheinlichkeitsamplitude für die Feldkonfigurationen am Gribov-Horizont. Aufgrund dessen ist der Ansatz (4.5) für das Vakuumwellenfunktional sehr gut dafür geeignet, die Fragestellung zu untersuchen, inwieweit eine unterschiedliche Wahrscheinlichkeitsverteilung der Feldkonfigurationen am Gribov-Horizont Einfluß auf das nicht-perturbative Verhalten der Yang-Mills-Theorie und damit insbesondere auf den Farbeinschluß hat.

Bezug nehmend auf (3.13) ist das Skalarprodukt zwischen zwei Zuständen  $\Psi$  und  $\Phi$  im Raum der transversalen Eichfelder  $A^\perp$  durch

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \int_{\Lambda} \mathcal{D}A^\perp \mathcal{J}[A^\perp] \Psi^*[A^\perp] \Phi[A^\perp] \quad (4.9)$$

definiert, wobei die Pfadintegration prinzipiell auf die FMR (siehe Abb. 4.1) beschränkt ist. Die Faddeev-Popov-Determinante in (4.9) repräsentiert das nichttriviale Integrationsmaß des gekrümmten, transversalen Konfigurationsraumes. Dementsprechend ist die Vakuumenergie

$$E(\alpha, \omega) = \langle \Psi | H | \Psi \rangle = \int_{\Lambda} \mathcal{D}A^\perp \mathcal{J}[A^\perp] \Psi^*[A^\perp] H \Psi[A^\perp] \quad (4.10)$$

ein Funktional der beiden Variationsparameter  $\alpha$  und  $\omega$ , welche durch die Minimierung dieser Energie bestimmt werden.

### 4.3 Minimierung der Vakuumenergie

Die Minimierung der Vakuumenergie (4.10) erfordert die Erfüllung der beiden Bedingungen

$$\frac{\delta \langle H \rangle}{\delta \omega} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d \langle H \rangle}{d \alpha} = 0, \quad (4.11)$$

aus denen sich dann die Variationsparameter  $\omega$  und  $\alpha$  bestimmen. In dem hier vorliegenden Abschnitt leiten wir einen Zusammenhang zwischen diesen beiden Minimierungsbedingungen ab, welcher zu sehr interessanten und weitreichenden Folgerungen führen wird.

Die Variation der Vakuumenergie (4.10) nach der  $\omega$ -Funktion, basierend auf dem allgemeinen Wellenfunktional (4.5), führt auf

$$\frac{\delta \langle H \rangle}{\delta \omega} = \frac{2}{\mathcal{N}} \frac{\delta \mathcal{N}}{\delta \omega} \langle H \rangle - \left\langle \left\{ H, \frac{\delta S}{\delta \omega} \right\} \right\rangle, \quad (4.12)$$

wobei die geschweiften Klammern  $\{, \}$  den Antikommutator bezeichnen. Für die Funktionalableitung des Normierungsfaktors  $\mathcal{N}$  (4.8) nach  $\omega$  ergibt sich der Ausdruck

$$\frac{\delta \mathcal{N}}{\delta \omega} = \mathcal{N} \left\langle \frac{\delta S}{\delta \omega} \right\rangle, \quad (4.13)$$

und zusammen mit (4.12) erhalten wir dann für die Bestimmungsgleichung der  $\omega$ -Funktion die Gleichung

$$\frac{\delta \langle H \rangle}{\delta \omega} = 2 \langle H \rangle \left\langle \frac{\delta S}{\delta \omega} \right\rangle - \left\langle \left\{ H, \frac{\delta S}{\delta \omega} \right\} \right\rangle = 0. \quad (4.14)$$

Für die zweite Minimierungsbedingung in (4.11), also die Ableitung der Vakuumenergie (4.10) nach der Faddeev-Popov-Potenz  $\alpha$ , finden wir

$$\frac{d\langle H \rangle}{d\alpha} = \frac{2}{\mathcal{N}} \frac{d\mathcal{N}}{d\alpha} \langle H \rangle - \left\langle \left\{ H, \ln \mathcal{J}[A^\perp] \right\} \right\rangle. \quad (4.15)$$

Zusammen mit der Ableitung des Normierungsfaktors  $\mathcal{N}$  (4.8) nach  $\alpha$

$$\frac{d\mathcal{N}}{d\alpha} = \mathcal{N} \left\langle \ln \mathcal{J}[A^\perp] \right\rangle \quad (4.16)$$

folgt daraus für die Bestimmungsgleichung der Faddeev-Popov-Potenz  $\alpha$

$$\frac{d\langle H \rangle}{d\alpha} = 2 \langle H \rangle \left\langle \ln \mathcal{J}[A^\perp] \right\rangle - \left\langle \left\{ H, \ln \mathcal{J}[A^\perp] \right\} \right\rangle = 0. \quad (4.17)$$

Für die weitere Behandlung der beiden Variationsableitungen (4.14) und (4.17) betrachten wir zunächst den Logarithmus der Faddeev-Popov-Determinante  $\ln \mathcal{J}[A^\perp]$  und untersuchen dabei eine Reihenentwicklung nach dem Eichpotential  $A^\perp$  um den Punkt  $A^\perp = 0$ . Da aus der Definition (4.6) unmittelbar

$$\ln \mathcal{J}[A^\perp] \Big|_{A^\perp=0} = 0 \quad (4.18)$$

folgt, verschwindet das erste Glied dieser Entwicklung. Die Funktionalableitung von  $\ln \mathcal{J}[A^\perp]$  nach dem Eichpotential  $A^\perp$  wurde bereits im Kapitel 3 berechnet<sup>4</sup> (siehe (3.78))

$$\frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta A_k^{\perp a}(\mathbf{x})} = -\text{Tr} \left( G \Gamma_k^{0,a}(\mathbf{x}) \right). \quad (4.19)$$

Dabei bezeichnet  $G = (-\partial_i \hat{D}_i(A^\perp))^{-1}$  den inversen Faddeev-Popov-Operator und  $\Gamma_k^{0,a}(\mathbf{x}) = \delta G^{-1} / \delta A_k^{\perp a}(\mathbf{x})$  den nackten Geist-Gluon-Vertex (3.55). Da für  $A^\perp = 0$  der inverse Faddeev-Popov-Operator  $G(A^\perp = 0) = (-\partial^2)^{-1}$  diagonal im Farbraum ist und andererseits  $\Gamma_k^{0,a}(\mathbf{x}) \sim \hat{T}^a$  proportional zum adjungierten Generator  $\hat{T}^a$  ist, verschwindet in der Gl. (4.19) die Spur im Farbraum und somit auch die Funktionalableitung am Punkt  $A^\perp = 0$

$$\frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta A_k^{\perp a}(\mathbf{x})} \Big|_{A^\perp=0} = 0. \quad (4.20)$$

Aufgrund der beiden Relationen (4.18) und (4.20) läßt sich  $\ln \mathcal{J}[A^\perp]$  in exakter Weise, basierend auf einem Funktional  $C_{ij}^{ab}[A^\perp](\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ , in der Form

$$\ln \mathcal{J}[A^\perp] = \int d^3x d^3x' C_{ij}^{ab}[A^\perp](\mathbf{x}, \mathbf{x}') A_i^{\perp a}(\mathbf{x}) A_j^{\perp b}(\mathbf{x}') \quad (4.21)$$

darstellen. Der Erwartungswert

$$\left\langle \ln \mathcal{J}[A^\perp] \right\rangle = \left\langle \text{Tr} (\ln G^{-1} - \ln(-\partial^2)) \right\rangle \quad (4.22)$$

besteht innerhalb einer diagrammatischen Entwicklung aus geschlossenen Geistschleifen, von denen eine gerade Anzahl von Gluonlinien ein- bzw. auslaufen, die ihrerseits über den Gluonpropagator  $\langle A^\perp A^\perp \rangle$  miteinander kontrahiert sind. In der vorliegenden Arbeit verwenden wir

<sup>4</sup>Diese Spurbildung umfaßt sowohl den Farb- als auch den Lorentzraum.

die bereits im Abschnitt 3.2.3 beschriebene „rainbow ladder“-Näherung, welche die Ersetzung des vollen Geist-Gluon-Vertex  $\Gamma$  durch den nackten Vertex  $\Gamma^0$  beinhaltet. Innerhalb dieser Näherung und im Rahmen einer Schleifenentwicklung nach dem vollen Geistpropagator ist der führende Term von  $\langle \ln \mathcal{J}[A^\perp] \rangle$  (4.22) durch das in Abb. 4.2 (a) dargestellte Zweischleifendiagramm gegeben, welches lediglich einen einzelnen Gluonpropagator enthält.

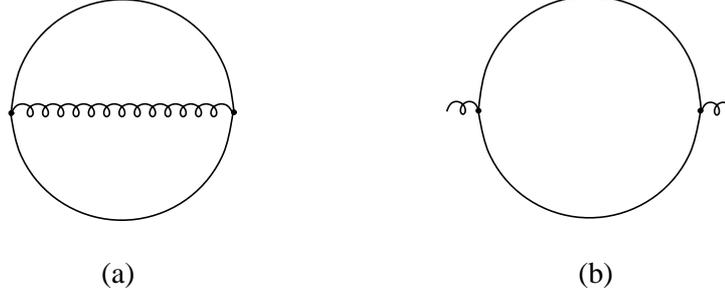


Abbildung 4.2: Die Terme in führender Ordnung innerhalb einer Entwicklung nach dem vollen Geistpropagator für (a)  $\langle \ln \mathcal{J}[A^\perp] \rangle$  (4.22) und (b) die Krümmung  $\chi$  (4.24).

Diese Behandlung von  $\langle \ln \mathcal{J}[A^\perp] \rangle$  ist konsistent mit der Beschränkung auf das Zweischleifenniveau bei der Berechnung der Vakuumenergie im Abschnitt 3.3. Deshalb ist der führende Term des Erwartungswertes von  $\ln \mathcal{J}[A^\perp]$  (4.22) innerhalb einer Schleifenentwicklung nach dem vollen Geistpropagator durch

$$\langle \ln \mathcal{J}[A^\perp] \rangle \simeq \int d^3x d^3x' \langle C_{ij}^{ab}[A^\perp](\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rangle \langle A_i^{\perp a}(\mathbf{x}) A_j^{\perp b}(\mathbf{x}') \rangle \quad (4.23)$$

bestimmt. Die konkrete Berechnung der Vakuumenergie bei Beschränkung auf das Zweischleifenniveau (vgl. Abschnitt 4.5) zeigt, daß Terme der Form  $\langle \frac{\delta C}{\delta A^\perp} A^\perp \rangle$  und  $\langle \frac{\delta^2 C}{\delta A^\perp \delta A^\perp} \rangle$  zu Energiebeiträgen führen, welche über das Zweischleifenniveau hinausgehen und daher vernachlässigt werden können. Mit dieser Näherung erhalten wir aus der Gl. (4.21) einen Zusammenhang zwischen dem Funktional  $C_{ij}^{ab}[A^\perp](\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  und dem analog zu (3.81) definierten Krümmungstensor<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} \chi_{ij}^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &\equiv -\frac{1}{2} \left\langle \frac{\delta^2 \ln \mathcal{J}}{\delta A_i^{\perp a}(\mathbf{x}) \delta A_j^{\perp b}(\mathbf{x}')} \right\rangle \\ &= -\langle C_{ij}^{ab}[A^\perp](\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rangle . \end{aligned} \quad (4.24)$$

Die diagrammatische Struktur der Krümmung  $\chi$  ist in der Abb. 4.2 (b) dargestellt und entsteht unmittelbar aus dem Diagramm in Abb. 4.2 (a) durch das Entfernen des Gluonpropagators. Für die Behandlung im Rahmen der Zweischleifenordnung können wir das Funktional  $C$  in (4.21) durch dessen Erwartungswert  $(-\chi)$  ersetzen und erhalten damit

$$\ln \mathcal{J}[A^\perp] = - \int d^3x d^3x' \chi_{ij}^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') A_i^{\perp a}(\mathbf{x}) A_j^{\perp b}(\mathbf{x}') . \quad (4.25)$$

<sup>5</sup>Dabei ist jedoch zu beachten, daß sich im vorliegenden Fall die Definition des Krümmungstensors  $\chi_{ij}^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  auf den allgemeineren Vakuumzustand (4.5) bezieht, wohingegen die Definition (3.81) auf dem Zustand (3.35) basiert.

Durch das Einsetzen dieser Relation (4.25) in die Gl. (4.17) finden wir für die Variationsgleichung bezüglich  $\alpha$

$$\frac{d\langle H \rangle}{d\alpha} = - \int d^3x d^3x' \chi_{ij}^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \left[ 2 \langle A_i^{\perp a}(\mathbf{x}) A_j^{\perp b}(\mathbf{x}') \rangle \langle H \rangle - \langle \{ A_i^{\perp a}(\mathbf{x}) A_j^{\perp b}(\mathbf{x}'), H \} \rangle \right]. \quad (4.26)$$

Andererseits folgt basierend auf dem Ansatz (4.5) bzw. (4.7) für das Wellenfunktional die Relation

$$\frac{\delta S}{\delta \omega_{ij}^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')} = \frac{1}{2} A_i^{\perp a}(\mathbf{x}) A_j^{\perp b}(\mathbf{x}'), \quad (4.27)$$

welche zusammen mit der Gl. (4.14) auf die folgende Form der Variationsgleichung führt

$$2 \frac{\delta \langle H \rangle}{\delta \omega_{ij}^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')} = 2 \langle A_i^{\perp a}(\mathbf{x}) A_j^{\perp b}(\mathbf{x}') \rangle \langle H \rangle - \langle \{ A_i^{\perp a}(\mathbf{x}) A_j^{\perp b}(\mathbf{x}'), H \} \rangle. \quad (4.28)$$

Durch die Kombination der beiden Gl. (4.26) und (4.28) erhalten wir dann den grundlegenden Zusammenhang

$$\frac{d\langle H \rangle}{d\alpha} = -2 \int d^3x d^3x' \chi_{ij}^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\delta \langle H \rangle}{\delta \omega_{ij}^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')} \quad (4.29)$$

zwischen den beiden Variationen  $\frac{d\langle H \rangle}{d\alpha}$  und  $\frac{\delta \langle H \rangle}{\delta \omega}$  der Vakuumenergie. Damit sind insbesondere die beiden Minimierungsbedingungen (4.11) nicht unabhängig voneinander. Wird also die Stationaritätsbedingung  $\frac{\delta \langle H \rangle}{\delta \omega} = 0$  erfüllt, dann ist aufgrund dieser Relation (4.29) automatisch die Minimierungsbedingung der Faddeev-Popov-Potenz  $\frac{d\langle H \rangle}{d\alpha} = 0$  ebenfalls realisiert. An dieser Stelle ist darauf hinzuweisen, daß der Zusammenhang (4.29) zwischen  $\frac{d\langle H \rangle}{d\alpha}$  und  $\frac{\delta \langle H \rangle}{\delta \omega}$  im Rahmen der Zweischleifenordnung bezüglich der Vakuumenergie  $\langle H \rangle$  in exakter Weise gültig ist.

Die Relation (4.29) und die darauf basierenden Schlußfolgerungen lassen sich durch eine explizite Berechnung der Vakuumenergie  $\langle H \rangle$  unter Verwendung von (4.5) und (4.7) ebenfalls ableiten. Wir werden deshalb in den beiden folgenden Abschnitten zunächst den Gluonpropagator und anschließend die Vakuumenergie berechnen.

## 4.4 Gluonpropagator und Krümmung

Für die Berechnung verschiedener Erwartungswerte, insbesondere der Vakuumenergie  $\langle H \rangle$  ist es notwendig, Erwartungswerte des Eichfeldes  $A^\perp$  bezüglich des Wellenfunktionals (4.5) zu berechnen. Durch die Benutzung eines geeigneten erzeugenden Funktionals der Form

$$\begin{aligned} Z[j] &= \left\langle \Psi \left| \exp \left[ \int d^3x A_i^{\perp a}(\mathbf{x}) j_i^a(\mathbf{x}) \right] \right| \Psi \right\rangle \\ &= \mathcal{N}^2 \int DA^\perp \mathcal{J}[A^\perp]^{1-2\alpha} \exp \left[ -2S[A^\perp] + \int d^3x A_i^{\perp a}(\mathbf{x}) j_i^a(\mathbf{x}) \right] \end{aligned} \quad (4.30)$$

können die Erwartungswerte der Feldoperatoren  $A^\perp$  allgemein durch die Funktionalableitungen des erzeugenden Funktionals  $Z$  nach der Quelle  $j$  berechnet werden

$$\langle A_{i_1}^{\perp a_1}(\mathbf{x}_1) \dots A_{i_n}^{\perp a_n}(\mathbf{x}_n) \rangle_\Psi = \left[ \frac{\delta^n Z[j]}{\delta j_{i_1}^{a_1}(\mathbf{x}_1) \dots \delta j_{i_n}^{a_n}(\mathbf{x}_n)} \right]_{j=0}. \quad (4.31)$$

Wie bereits im Kapitel 3 diskutiert, hängt die Variationsfunktion  $\omega_{ij}^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  wegen der Translations- und Rotationsinvarianz des Lorentzraumes lediglich vom Abstand  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  ab. Ferner gehen wir, Bezug nehmend auf die Isotropie des Farbraumes, der Einfachheit halber von einer diagonalen Variationsfunktion

$$\omega_{ij}^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta_{ij} \delta^{ab} \omega(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (4.32)$$

im Farbraum aus. Die quadratische Ergänzung im Exponenten von (4.30) und die anschließende Variablentransformation  $A' = A - \sigma$  im Pfadintegral führt dann auf die folgende Darstellung des erzeugenden Funktionals

$$\begin{aligned} Z[j] = \exp & \left[ \frac{1}{4} \int d^3x \int d^3x' j_i^a(\mathbf{x}) t_{ij}(\mathbf{x}) \omega^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') j_j^a(\mathbf{x}') \right] \\ & \cdot \mathcal{N}^2 \int DA^\perp \mathcal{J} \left[ A^\perp + \sigma^\perp[j^\perp] \right]^{1-2\alpha} \exp \left[ - \int d^3x \int d^3x' A_i^{\perp a}(\mathbf{x}) \omega(\mathbf{x} - \mathbf{x}') A_i^{\perp a}(\mathbf{x}') \right] \end{aligned} \quad (4.33)$$

mit

$$\sigma_i^{\perp a}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int d^3x' \omega^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') j_i^{\perp a}(\mathbf{x}'). \quad (4.34)$$

Dieses Funktional  $Z[j]$  besitzt innerhalb des verbleibenden Pfadintegrals im Argument der Faddeev-Popov-Determinante eine komplizierte Abhängigkeit von der Quelle  $j$ . Für die Wahl  $\alpha = \frac{1}{2}$ , welche dem in Kapitel 3 benutzten Ansatz (3.35) zugrunde liegt, verschwindet diese Abhängigkeit, und das erzeugende Funktional geht in die deutlich einfachere Form (3.42) über.

Bevor wir mit Hilfe von (4.33) den Gluonpropagator  $\langle A^\perp A^\perp \rangle_\Psi \equiv \langle \Psi | A^\perp A^\perp | \Psi \rangle$  berechnen, diskutieren wir zunächst den Erwartungswert eines einzelnen Feldoperators  $\langle A^\perp \rangle_\Psi$  basierend auf dem Wellenfunktional (4.5). Unter Verwendung des erzeugenden Funktionals (4.33) finden wir für  $\langle A^\perp \rangle_\Psi$

$$\langle A_i^{\perp a}(\mathbf{x}) \rangle_\Psi = \left[ \frac{\delta Z[j]}{\delta j_i^a(\mathbf{x})} \right]_{j=0} = (1 - 2\alpha) \left\langle \left[ \frac{\delta \ln \mathcal{J}[A^\perp + \sigma^\perp]}{\delta j_i^a(\mathbf{x})} \right]_{j=0} \right\rangle_\Psi. \quad (4.35)$$

Die Funktionalableitung von  $\ln \mathcal{J}$  nach  $j$  läßt sich mit (4.34) in der Form

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\delta \ln \mathcal{J}[A^\perp + \sigma^\perp]}{\delta j_i^a(\mathbf{x})} \right]_{j=0} &= \frac{1}{2} \int d^3x_1 \omega^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) t_{in}(\mathbf{x}_1) \left[ \frac{\delta \ln \mathcal{J}[A^\perp + \sigma^\perp]}{\delta (A^\perp + \sigma^\perp)_n^a(\mathbf{x}_1)} \right]_{j=0} \\ &= \frac{i}{2} \int d^3x_1 \omega^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \left( \Pi_i^{\perp a}(\mathbf{x}_1) \ln \mathcal{J}[A^\perp] \right) \end{aligned} \quad (4.36)$$

darstellen. Mit dieser Relation und der Beziehung (3.27) folgt dann für  $\langle A^\perp \rangle_\Psi$ <sup>6</sup>

$$\begin{aligned} \langle A_i^{\perp a}(\mathbf{x}) \rangle_\Psi &= -\frac{g}{2}(1-2\alpha) \int d^3x_1 \omega^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1) t_{ij}(\mathbf{x}_1) \operatorname{tr} \left[ \hat{T}^a \left( \partial_j^{\mathbf{x}_2} \langle G(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \rangle_\Psi \right)_{\mathbf{x}_2=\mathbf{x}_1} \right] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Da aufgrund der Translations- und Rotationsinvarianz des Lorentzraumes der Erwartungswert  $G_\Psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \equiv \langle G(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \rangle_\Psi = G_\Psi(|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|)$  lediglich vom Abstand  $|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|$  abhängt, verschwindet in (4.37) der Ausdruck  $[\partial_j^{\mathbf{x}_2} \langle G(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \rangle_\Psi]_{\mathbf{x}_2=\mathbf{x}_1}$  und damit auch  $\langle A_i^{\perp a}(\mathbf{x}) \rangle_\Psi$ .

Im folgenden untersuchen wir, basierend auf dem verallgemeinerten Wellenfunktional (4.5), die Struktur des Gluonpropagators  $\langle A^\perp A^\perp \rangle_\Psi$ . Durch zweimaliges Ableiten des erzeugenden Funktionals  $Z[j]$  (4.33) nach der Quelle  $j$  erhalten wir für den Gluonpropagator den Ausdruck

$$\begin{aligned} \langle A_i^{\perp a}(\mathbf{x}) A_j^{\perp b}(\mathbf{x}') \rangle_\Psi &= \frac{1}{2} \delta^{ab} t_{ij}(\mathbf{x}) \omega^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \\ &\quad + (1-2\alpha)^2 \left\langle \left[ \frac{\delta \ln \mathcal{J}[A^\perp + \sigma^\perp]}{\delta j_i^a(\mathbf{x})} \cdot \frac{\delta \ln \mathcal{J}[A^\perp + \sigma^\perp]}{\delta j_j^b(\mathbf{x}')} \right]_{j=0} \right\rangle_\Psi \\ &\quad + (1-2\alpha) \left\langle \left[ \frac{\delta^2 \ln \mathcal{J}[A^\perp + \sigma^\perp]}{\delta j_i^a(\mathbf{x}) \delta j_j^b(\mathbf{x}')} \right]_{j=0} \right\rangle_\Psi. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Unter Verwendung von Gl. (4.34) ergibt sich für die zweite Funktionalableitung von  $\ln \mathcal{J}$  in Gl. (4.38) der Zusammenhang

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\delta^2 \ln \mathcal{J}[A^\perp + \sigma^\perp]}{\delta j_i^a(\mathbf{x}) \delta j_j^b(\mathbf{x}')} \right]_{j=0} &= \frac{1}{4} \int d^3x_1 \int d^3x_2 [t_{in}(\mathbf{x}_1) \omega^{-1}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x})] [t_{jm}(\mathbf{x}_2) \omega^{-1}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}')] \\ &\quad \cdot \frac{\delta^2 \ln \mathcal{J}[A^\perp]}{\delta A_n^{\perp a}(\mathbf{x}_1) \delta A_m^{\perp b}(\mathbf{x}_2)}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Mit dieser Gleichung und der Relation (4.36) folgt dann für den Gluonpropagator

$$\begin{aligned} \langle A_i^{\perp a}(\mathbf{x}) A_j^{\perp b}(\mathbf{x}') \rangle_\Psi &= \frac{1}{2} \delta^{ab} t_{ij}(\mathbf{x}) \omega^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \\ &\quad + \int d^3x_1 \int d^3x_2 [t_{in}(\mathbf{x}_1) \omega^{-1}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x})] [t_{jm}(\mathbf{x}_2) \omega^{-1}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}')] \\ &\quad \cdot \left[ \left( \alpha - \frac{1}{2} \right)^2 \left\langle \frac{\delta \ln \mathcal{J}[A^\perp]}{\delta A_n^{\perp a}(\mathbf{x}_1)} \cdot \frac{\delta \ln \mathcal{J}[A^\perp]}{\delta A_m^{\perp b}(\mathbf{x}_2)} \right\rangle_\Psi \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left( \alpha - \frac{1}{2} \right) \left\langle \frac{\delta^2 \ln \mathcal{J}[A^\perp]}{\delta A_n^{\perp a}(\mathbf{x}_1) \delta A_m^{\perp b}(\mathbf{x}_2)} \right\rangle_\Psi \right]. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Diese Darstellung des Gluonpropagators ist exakt und beinhaltet im Vergleich zu (3.45) im zweiten Term komplizierte Erwartungswerte bezüglich  $\ln \mathcal{J}$ , welche wir im folgenden diskutieren werden. Dazu definieren wir mit

$$\langle A_i^{\perp a}(\mathbf{x}) A_j^{\perp b}(\mathbf{x}') \rangle_\Psi = \frac{1}{2} \delta^{ab} t_{ij}(\mathbf{x}) \Omega^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \quad (4.41)$$

<sup>6</sup>Die Spur  $\operatorname{tr}$  bezieht sich lediglich auf den Farbraum.

eine skalare Funktion  $\Omega$ , welche in derselben Weise wie  $\omega$  in (3.45) den Gluonpropagator charakterisiert.<sup>7</sup> Für die Berechnung der Erwartungswerte in Gl. (4.40) nähern wir den Erwartungswert  $\langle A^\perp \dots A^\perp \rangle_\Psi$  einer beliebigen Potenz in  $A^\perp$  durch die Summe über alle möglichen Permutationen von Zweierkorrelationen  $\langle A^\perp A^\perp \rangle_\Psi$  an. Wir zeigen am Ende dieses Abschnitts, daß diese Näherung innerhalb der Einschleifennäherung in den Variationsgleichungen (4.11) (bzw. die Zweischleifennäherung in der Energie) tatsächlich gerechtfertigt ist. Damit können wir verschiedene Berechnungsergebnisse aus dem Kapitel 3 übernehmen, indem wir dort  $\omega$  durch  $\Omega$  ersetzen.

Der zweite Erwartungswert  $\left\langle \frac{\delta^2 \ln \mathcal{J}}{\delta A^\perp \delta A^\perp} \right\rangle$  in (4.40) ist im wesentlichen durch den in (4.24) bzw. (3.81) definierten Krümmungstensor  $\chi_{ij}^{ab}$  gegeben. Zwischen der analog zu (3.83) definierten skalaren Krümmung und dem Krümmungstensor  $\chi_{ij}^{ab}$  gilt in der Ortsdarstellung der Zusammenhang

$$t_{in}(\mathbf{x}) \chi_{nj}^{ab}(\mathbf{x}) = \delta^{ab} t_{ij}(\mathbf{x}) \chi(\mathbf{x}), \quad (4.42)$$

welcher unmittelbar auf dem Ergebnis (3.87) basiert. Der erste Erwartungswert  $\left\langle \frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta A^\perp} \frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta A^\perp} \right\rangle$  in (4.40) wurde bereits im Abschnitt 3.3 berechnet. Insbesondere folgt aus der Relation (3.100) die Beziehung

$$\left\langle \left( \frac{1}{2} t_{in}(\mathbf{x}_1) \frac{\delta \ln \mathcal{J}[A^\perp]}{\delta A_n^{\perp a}(\mathbf{x}_1)} \right) \cdot \left( \frac{1}{2} t_{jm}(\mathbf{x}_2) \frac{\delta \ln \mathcal{J}[A^\perp]}{\delta A_m^{\perp b}(\mathbf{x}_2)} \right) \right\rangle_\Psi = \frac{1}{2} \delta^{ab} \int d^3 x_3 \int d^3 x_4 \chi(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3) t_{ij}(\mathbf{x}_3) \cdot \Omega^{-1}(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4) \chi(\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_2). \quad (4.43)$$

Mit der Definition des Krümmungstensors (4.24) und unter Verwendung der beiden Relationen (4.42) und (4.43) erhalten wir für die in (4.41) definierte skalare Funktion  $\Omega^{-1}$  des Gluonpropagators den folgenden Ausdruck

$$\begin{aligned} \Omega^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= \omega^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ &+ 4 \left( \alpha - \frac{1}{2} \right)^2 \int d^3 x_1 \int d^3 x_2 \int d^3 x_3 \int d^3 x_4 \omega^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \chi(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \\ &\quad \cdot \Omega^{-1}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3) \chi(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4) \omega^{-1}(\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}') \\ &+ 2 \left( \alpha - \frac{1}{2} \right) \int d^3 x_1 \int d^3 x_2 \omega^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \chi(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \omega^{-1}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}'). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Der hier vorliegende Zusammenhang des Gluonpropagators  $\Omega^{-1}$  mit der Variationsfunktion  $\omega$  und der skalaren Krümmung  $\chi$  besitzt in der Impulsdarstellung

$$\Omega(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \Omega(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \quad (4.45)$$

<sup>7</sup>Aufgrund der Translations- und Rotationsinvarianz im Lorentzraum hängt der Gluonpropagator lediglich vom Abstand  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  ab und kann demzufolge basierend auf der exakten Darstellung (4.40) durch

$$\begin{aligned} \langle A_i^{\perp a}(\mathbf{x}) A_j^{\perp b}(\mathbf{x}') \rangle_\Psi &= t_{in}(\mathbf{x}) t_{jm}(\mathbf{x}') S_{nm}^{ab}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ &= t_{in}(\mathbf{x}) t_{jm}(\mathbf{x}) S_{nm}^{ab}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \end{aligned}$$

ausgedrückt werden. Die Matrix  $S_{nm}^{ab}$  ist bezüglich der Farb- und Lorentzindizes symmetrisch, d. h. es gilt  $S_{nm}^{ab}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = S_{mn}^{ba}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ , und kann deshalb in diesen Räumen diagonalisiert werden. Da nun durch den Ansatz (4.32) weder die Farbe noch eine Raumrichtung ausgezeichnet wird, hat  $S_{nm}^{ab}$  die Struktur  $S_{nm}^{ab}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \delta_{nm} \delta^{ab} S(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ . Damit besitzt der Gluonpropagator genau die in (4.41) dargestellte Form.

eine besonders einfache Form

$$\Omega(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}) - (2\alpha - 1)\chi(\mathbf{k}). \quad (4.46)$$

Dabei ist die skalare Krümmung  $\chi(k)$  analog zu (3.88) durch

$$\chi(\mathbf{k}) = \frac{N_C}{4} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left(1 - (\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{q}})^2\right) \frac{d(\mathbf{k} - \mathbf{q})d(\mathbf{q})}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} \quad (4.47)$$

gegeben und hängt lediglich vom Geistformfaktor  $d(k)$  ab. Dieser Formfaktor  $d(k)$  ist innerhalb der „rainbow ladder“-Näherung durch die im Kapitel 3 abgeleitete Integralgleichung (3.69) bestimmt, wobei für das hier vorliegende Wellenfunktional (4.5) die Variationsfunktion  $\omega$  durch die Gluonenergie  $\Omega$  ersetzt werden muß. Für die spezielle Wahl von  $\alpha = \frac{1}{2}$  stimmt die Gluonenergie  $\Omega(k)$  (4.46) mit der Variationsfunktion  $\omega(k)$  überein.

Im folgenden diskutieren wir die Struktur der beiden Erwartungswerte  $\langle A^\perp A^\perp A^\perp \rangle_\Psi$  und  $\langle A^\perp A^\perp A^\perp A^\perp \rangle_\Psi$ , um die oben verwendete Faktorisierung für Erwartungswerte der Form  $\langle A^\perp \dots A^\perp \rangle_\Psi$  in die Summe über alle möglichen Permutationen von Zweierkorrelationen  $\langle A^\perp A^\perp \rangle_\Psi$  im Rahmen der Einschleifennäherung bezüglich der Variationsgleichungen (4.11) zu rechtfertigen. Die Dreipunktkorrelationsfunktion wird unter Verwendung des erzeugenden Funktionals (4.33) berechnet und besitzt die strukturelle Form

$$\begin{aligned} \langle A^\perp A^\perp A^\perp \rangle_\Psi = & \\ & - 3(2\alpha - 1) \left(\frac{1}{2}\omega^{-1}\right) \left\langle \left[ \frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta j} \right]_{j=0} \right\rangle_\Psi - (2\alpha - 1)^3 \left\langle \left[ \frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta j} \cdot \frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta j} \cdot \frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta j} \right]_{j=0} \right\rangle_\Psi \\ & + 3(2\alpha - 1)^2 \left\langle \left[ \frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta j} \cdot \frac{\delta^2 \ln \mathcal{J}}{\delta j \delta j} \right]_{j=0} \right\rangle_\Psi - (2\alpha - 1)^2 \left\langle \left[ \frac{\delta^3 \ln \mathcal{J}}{\delta j \delta j \delta j} \right]_{j=0} \right\rangle_\Psi \simeq 0. \quad (4.48) \end{aligned}$$

Der erste Term  $\langle [\frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta j}]_{j=0} \rangle_\Psi$  enthält den Erwartungswert  $\langle A^\perp \rangle_\Psi$  und verschwindet aufgrund der Relation (4.37). Der vierte Term in (4.48) wird vernachlässigt, da er zu Beiträgen führt, welche in den Variationsgleichungen (4.11) über das Einschleifenniveau hinausgehen. Die beiden restlichen Terme in (4.48) müssen aufgrund der Beschränkung auf das Einschleifenniveau faktorisiert werden. Dabei enthält jeder Term jeweils einen Faktor mit dem Ausdruck  $\langle [\frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta j}]_{j=0} \rangle_\Psi$ , welcher unmittelbar mit  $\langle A^\perp \rangle_\Psi$  zusammenhängt und wiederum wegen (4.37) keinen Beitrag liefert. Damit verschwindet der Erwartungswert  $\langle A^\perp A^\perp A^\perp \rangle_\Psi$  im Rahmen der Einschleifennäherung.

Die Ableitung der Korrelationsfunktion  $\langle A^\perp A^\perp A^\perp A^\perp \rangle_\Psi$  aus dem erzeugenden Funktional

(4.33) führt auf die Form

$$\begin{aligned}
\langle A^\perp A^\perp A^\perp A^\perp \rangle_\Psi = & \\
& + 3 \left( \frac{1}{2} \omega^{-1} \right) \left( \frac{1}{2} \omega^{-1} \right) + 6(2\alpha - 1)^2 \left( \frac{1}{2} \omega^{-1} \right) \left\langle \left[ \frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta j} \cdot \frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta j} \right]_{j=0} \right\rangle_\Psi \\
& - 6(2\alpha - 1) \left( \frac{1}{2} \omega^{-1} \right) \left\langle \left[ \frac{\delta^2 \ln \mathcal{J}}{\delta j \delta j} \right]_{j=0} \right\rangle_\Psi + 3(2\alpha - 1)^2 \left\langle \left[ \frac{\delta^2 \ln \mathcal{J}}{\delta j \delta j} \cdot \frac{\delta^2 \ln \mathcal{J}}{\delta j \delta j} \right]_{j=0} \right\rangle_\Psi \\
& - 6(2\alpha - 1)^3 \left\langle \left[ \frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta j} \cdot \frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta j} \cdot \frac{\delta^2 \ln \mathcal{J}}{\delta j \delta j} \right]_{j=0} \right\rangle_\Psi + 4(2\alpha - 1)^2 \left\langle \left[ \frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta j} \cdot \frac{\delta^3 \ln \mathcal{J}}{\delta j \delta j \delta j} \right]_{j=0} \right\rangle_\Psi \\
& + (2\alpha - 1)^4 \left\langle \left[ \frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta j} \cdot \frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta j} \cdot \frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta j} \cdot \frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta j} \right]_{j=0} \right\rangle_\Psi - (2\alpha - 1) \left\langle \left[ \frac{\delta^4 \ln \mathcal{J}}{\delta j \delta j \delta j \delta j} \right]_{j=0} \right\rangle_\Psi .
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Wir nehmen nun wegen der Beschränkung auf das Einschleifenniveau in analoger Weise zu (4.48) Faktorisierungen vor und berücksichtigen dabei, daß Erwartungswerte mit  $\langle [\frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta j}]_{j=0} \rangle_\Psi$  verschwinden und auch der Term  $\langle [\frac{\delta^4 \ln \mathcal{J}}{\delta j \delta j \delta j \delta j}]_{j=0} \rangle_\Psi$  über das Einschleifenniveau hinausgeht. Mit dieser Behandlung erhalten wir für die Vierpunktfunktion den folgenden Ausdruck

$$\begin{aligned}
\langle A^\perp A^\perp A^\perp A^\perp \rangle_\Psi \simeq & \\
& + 3 \left( \frac{1}{2} \omega^{-1} \right) \left( \frac{1}{2} \omega^{-1} \right) + 6(2\alpha - 1)^2 \left( \frac{1}{2} \omega^{-1} \right) \left\langle \left[ \frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta j} \cdot \frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta j} \right]_{j=0} \right\rangle_\Psi \\
& - 6(2\alpha - 1) \left( \frac{1}{2} \omega^{-1} \right) \left\langle \left[ \frac{\delta^2 \ln \mathcal{J}}{\delta j \delta j} \right]_{j=0} \right\rangle_\Psi + 3(2\alpha - 1)^2 \left\langle \left[ \frac{\delta^2 \ln \mathcal{J}}{\delta j \delta j} \right]_{j=0} \right\rangle_\Psi \left\langle \left[ \frac{\delta^2 \ln \mathcal{J}}{\delta j \delta j} \right]_{j=0} \right\rangle_\Psi \\
& - 6(2\alpha - 1)^3 \left\langle \left[ \frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta j} \cdot \frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta j} \right]_{j=0} \right\rangle_\Psi \left\langle \left[ \frac{\delta^2 \ln \mathcal{J}}{\delta j \delta j} \right]_{j=0} \right\rangle_\Psi \\
& + 3(2\alpha - 1)^4 \left\langle \left[ \frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta j} \cdot \frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta j} \right]_{j=0} \right\rangle_\Psi \left\langle \left[ \frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta j} \cdot \frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta j} \right]_{j=0} \right\rangle_\Psi .
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Unter Verwendung der strukturellen Form (4.38) des Gluonpropagators

$$\langle A^\perp A^\perp \rangle_\Psi = \left( \frac{1}{2} \omega^{-1} \right) + (2\alpha - 1)^2 \left\langle \left[ \frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta j} \cdot \frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta j} \right]_{j=0} \right\rangle_\Psi - (2\alpha - 1) \left\langle \left[ \frac{\delta^2 \ln \mathcal{J}}{\delta j \delta j} \right]_{j=0} \right\rangle_\Psi \tag{4.51}$$

stellt sich damit die Vierpunktfunktion im Rahmen der Einschleifennäherung als Summe über alle möglichen Permutationen von Zweierkorrelationen dar

$$\langle A_1^\perp A_2^\perp A_3^\perp A_4^\perp \rangle_\Psi \simeq \langle A_1^\perp A_2^\perp \rangle_\Psi \langle A_3^\perp A_4^\perp \rangle_\Psi + \langle A_1^\perp A_3^\perp \rangle_\Psi \langle A_2^\perp A_4^\perp \rangle_\Psi + \langle A_1^\perp A_4^\perp \rangle_\Psi \langle A_2^\perp A_3^\perp \rangle_\Psi . \tag{4.52}$$

Eine entsprechende Untersuchung für höhere Korrelationsfunktionen  $\langle A^\perp \dots A^\perp \rangle_\Psi$  zeigt, daß diese im Rahmen der diskutierten Schleifennäherung tatsächlich durch die Summe über alle möglichen Permutationen von Zweierkorrelationen  $\langle A^\perp A^\perp \rangle_\Psi$  repräsentiert wird. Für die

Wahl von  $\alpha = \frac{1}{2}$ , welche den Berechnungen in Kapitel 3 zugrunde liegt, gilt diese Faktorisierung in exakter Weise. Da die Faktorisierung für einen beliebigen Wert von  $\alpha$  innerhalb der Einschleifennäherung ebenfalls gültig ist, sind wir in der Lage, verschiedene Ergebnisse aus dem Kapitel 3 zu übernehmen, indem wir dort  $\omega$  durch  $\Omega$  ersetzen. Insbesondere für die Berechnung der Vakuumenergie im nächsten Abschnitt ist dies von großem Nutzen.

## 4.5 Vakuumenergie

In diesem Abschnitt berechnen wir die Energiedichte des Yang-Mills-Vakuums basierend auf dem Wellenfunktional (4.5). Dabei setzt sich die Gesamtenergie des Vakuums

$$E = \langle H \rangle_{\Psi} = E_k + E_p + E_c \quad (4.53)$$

aus den bereits in (3.22), (3.23) und (3.24) definierten Energien zusammen. Für die konkrete Berechnung dieser Energien bezüglich des hier vorliegenden Ansatzes für das Wellenfunktional gehen wir basierend auf der Definition in (4.5) von der folgenden Form der kinetischen Energie

$$E_k = \frac{1}{2} \int d^3x \int \mathcal{D}A^{\perp} \mathcal{J}[A^{\perp}]^{1-2\alpha} \left[ \tilde{\Pi}_i^{\perp a}(\mathbf{x}) \phi[A^{\perp}] \right]^* \left[ \tilde{\Pi}_i^{\perp a}(\mathbf{x}) \phi[A^{\perp}] \right], \quad (4.54)$$

der magnetischen Energie

$$E_p = \frac{1}{2} \int d^3x \int \mathcal{D}A^{\perp} \mathcal{J}[A^{\perp}]^{1-2\alpha} \phi[A^{\perp}]^* B_i^a(\mathbf{x})^2 \phi[A^{\perp}] \quad (4.55)$$

und der Coulombenergie

$$E_c = -\frac{g^2}{2} \int d^3x \int d^3x' \int \mathcal{D}A^{\perp} \mathcal{J}[A^{\perp}]^{1-2\alpha} \left[ \tilde{\Pi}_i^{\perp c}(\mathbf{x}) \phi[A^{\perp}] \right]^* \hat{A}_i^{\perp ca}(\mathbf{x}) \cdot F^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \hat{A}_j^{\perp bd}(\mathbf{x}') \left[ \tilde{\Pi}_j^{\perp d}(\mathbf{x}') \phi[A^{\perp}] \right] \quad (4.56)$$

aus. Diese Relationen für die Energien sind zunächst noch exakt und gehen erst dann in eine Näherung über, wenn wir für das Funktional  $\phi[A^{\perp}]$  den Gaußschen Ansatz (4.7) verwenden. Der transformierte Impulsoperator  $\tilde{\Pi}^{\perp}$  ist im vorliegenden Fall durch

$$\tilde{\Pi}_i^{\perp a}(\mathbf{x}) = \mathcal{J}^{\alpha}[A^{\perp}] \Pi_i^{\perp a}(\mathbf{x}) \mathcal{J}^{-\alpha}[A^{\perp}] \quad (4.57)$$

definiert und besitzt im Vergleich zu (3.28) die verallgemeinerte Darstellung

$$\tilde{\Pi}_i^{\perp a}(\mathbf{x}) = \Pi_i^{\perp a}(\mathbf{x}) + \frac{g}{i} \alpha t_{ij}(\mathbf{x}) \operatorname{tr} \left[ \hat{T}^a (\partial'_j G(\mathbf{x}', \mathbf{x}))_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}} \right], \quad (4.58)$$

wobei  $G$  der inverse Faddeev-Popov-Operator (3.29) ist.

Für die konkrete Berechnung der Energien (4.54), (4.55) und (4.56) unter Benutzung des Gaußschen Ansatzes (4.7) verwenden wir die im letzten Abschnitt 4.4 diskutierte, innerhalb der zugrundeliegenden Einschleifennäherung gültige Darstellung höherer Korrelationsfunktionen  $\langle A^{\perp} \dots A^{\perp} \rangle_{\Psi}$  durch eine Summe über alle möglichen Permutationen von Zweierkorrelationen  $\langle A^{\perp} A^{\perp} \rangle_{\Psi}$ . Unter Verwendung von (4.37), (4.46), (4.48) und (4.52) finden wir für

die magnetische Energie (4.55) im Impulsraum das folgende Ergebnis

$$E_p = \frac{N_C^2 - 1}{2} \delta(\mathbf{0}) \int d^3k \frac{\mathbf{k}^2}{\Omega(\mathbf{k})} + \frac{N_C(N_C^2 - 1)}{16} g^2 \delta(\mathbf{0}) \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\Omega(\mathbf{k})\Omega(\mathbf{k}')} \left(3 - (\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}')^2\right). \quad (4.59)$$

Für die deutlich kompliziertere Berechnung der kinetischen Energie (4.54) und der Coulombenergie (4.56) wiederholen wir die im Abschnitt 3.3 dargestellten Umformungen und erhalten dann im Impulsraum für die kinetische Energie

$$E_k = \frac{N_C^2 - 1}{2} \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \int d^3k \frac{[\omega(\mathbf{k}) - 2\alpha\chi(\mathbf{k})]^2}{\Omega(\mathbf{k})} \quad (4.60)$$

bzw. für die Coulombenergie

$$E_c = \frac{N_C(N_C^2 - 1)}{16} \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^3} \left(1 + (\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}')^2\right) \frac{d(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 f(\mathbf{k} - \mathbf{k}')}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2} \cdot \frac{\left([\omega(\mathbf{k}) - 2\alpha\chi(\mathbf{k})] - [\omega(\mathbf{k}') - 2\alpha\chi(\mathbf{k}')]\right)^2}{\Omega(\mathbf{k})\Omega(\mathbf{k}')}. \quad (4.61)$$

Dabei bezeichnet  $d(k)$  den in (3.66) definierten Geistformfaktor, welcher durch die Integralgleichung (3.69), in der  $\omega$  durch  $\Omega$  ersetzt werden muß, bestimmt ist. Analog dazu wird der in (3.73) eingeführte Coulombformfaktor  $f(k)$  durch die Integralgleichung (3.76) berechnet, in der ebenfalls  $\omega$  durch  $\Omega$  ersetzt werden muß.

Durch die Verwendung des Zusammenhangs (4.46) zwischen  $\Omega$  und  $\omega$  finden wir für die kinetische Energie (4.60) und die Coulombenergie (4.61) die folgende Darstellung

$$E_k = \frac{N_C^2 - 1}{2} \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \int d^3k \frac{[\Omega(\mathbf{k}) - \chi(\mathbf{k})]^2}{\Omega(\mathbf{k})} \quad (4.62)$$

$$E_c = \frac{N_C(N_C^2 - 1)}{16} \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^3} \left(1 + (\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}')^2\right) \frac{d(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 f(\mathbf{k} - \mathbf{k}')}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2} \cdot \frac{\left([\Omega(\mathbf{k}) - \chi(\mathbf{k})] - [\Omega(\mathbf{k}') - \chi(\mathbf{k}')]\right)^2}{\Omega(\mathbf{k})\Omega(\mathbf{k}')}. \quad (4.63)$$

Die Yang-Mills-Vakuumergie  $\langle H \rangle$ , bestehend aus der kinetischen (4.62), der magnetischen (4.59) und der Coulombenergie (4.63), hängt nur noch über die Gluonenergie  $\Omega(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}) - (2\alpha - 1)\chi(\mathbf{k})$  von den beiden Variationsfunktionen  $\alpha$  und  $\omega(k)$  ab. Dies impliziert, daß mit der Realisierung der Minimierungsbedingung  $\frac{\delta\langle H \rangle}{\delta\omega} = 0$  automatisch auch die zweite Bedingung  $\frac{d\langle H \rangle}{d\alpha}$  erfüllt ist. Diese Konsequenz für die Minimierung der Vakuumergie konnten wir bereits aus der Relation (4.29) ableiten, welche einen direkten Zusammenhang zwischen den beiden Minimierungsbedingungen herstellt. Da die Vakuumergie  $\langle H \rangle$  lediglich über die Gluonenergie  $\Omega(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}) - (2\alpha - 1)\chi(\mathbf{k})$  von  $\alpha$  und  $\omega(k)$  abhängt, genügt es, die Energie bezüglich  $\Omega(k)$  zu minimieren. Die aus dieser Minimierung resultierende Integralgleichung enthält innerhalb des Einschleifenniveaus wiederum nur die Gluonenergie  $\Omega(k)$  und besitzt

daher eine von  $\alpha$  unabhängige Lösung.<sup>8</sup> Damit ist das Infrarotverhalten des Gluonpropagators  $\langle A^\perp A^\perp \rangle_\Psi$  (4.41), als auch des Geist- und Coulombformfaktors und der skalaren Krümmung, unabhängig von der Potenz  $\alpha$  der Faddeev-Popov-Determinante im vorliegenden Ansatz (4.5) für das Yang-Mills-Vakuum. Insofern führen Variationsansätze für das Vakuum, welche sich insbesondere in ihrer Wahrscheinlichkeitsamplitude am Gribov-Horizont deutlich unterscheiden, nach der Variationsbehandlung zum selben Infrarotverhalten der Theorie. Daher ist die für die Untersuchungen im Kapitel 3 zugrundeliegende Wahl von  $\alpha = \frac{1}{2}$  gerechtfertigt. Ferner stimmt für diese Wahl von  $\alpha$  die Gluonenergie  $\Omega(k)$  mit der Variationsfunktion  $\omega(k)$  überein, und die Darstellung höherer Korrelationsfunktionen  $\langle A^\perp \dots A^\perp \rangle_\Psi$  durch die Summe über alle Permutationen von Zweierkorrelationen  $\langle A^\perp A^\perp \rangle_\Psi$  ist exakt gültig.

## 4.6 Yang-Mills-Wellenfunktional im Infraroten

Mit der Relation (4.25), die im Rahmen der Zweischleifenordnung bezüglich der Energie gültig ist, erhalten wir für das Wellenfunktional (4.5) des Yang-Mills-Vakuums die Darstellung

$$\begin{aligned} \Psi[A^\perp] &= \mathcal{N} \exp \left[ -\alpha \ln \mathcal{J} - \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3x' A_i^{\perp a}(\mathbf{x}) \omega(\mathbf{x} - \mathbf{x}') A_i^{\perp a}(\mathbf{x}') \right] \\ &= \mathcal{N} \exp \left[ -\frac{1}{2} \int d^3x \int d^3x' A_i^{\perp a}(\mathbf{x}) (\Omega(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - \chi(\mathbf{x} - \mathbf{x}')) A_i^{\perp a}(\mathbf{x}') \right] \end{aligned} \quad (4.64)$$

mit

$$\Omega(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \omega(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - (2\alpha - 1)\chi(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (4.65)$$

Die aus der Minimierungsbedingung  $\frac{\delta \langle H \rangle}{\delta \omega} = 0$  resultierende Lösung für die Gluonenergie  $\Omega(k)$  besitzt im infraroten Grenzfall das Verhalten

$$\Omega(k \rightarrow 0) = \chi(k \rightarrow 0) \quad \text{bzw.} \quad \omega(k \rightarrow 0) = 2\alpha\chi(k \rightarrow 0), \quad (4.66)$$

welches eine Verallgemeinerung des bereits im Kapitel 3 gefundenen Infrarotverhaltens (3.162)  $\omega(k \rightarrow 0) = \chi(k \rightarrow 0)$  für die Wahl  $\alpha = \frac{1}{2}$  darstellt. Dieses Verhalten bleibt unabhängig von der Implementierung völlig unterschiedlicher Renormierungsbedingungen gültig, solange die skalare Krümmung  $\chi(k)$  im Infraroten divergent ist. Da die Faddeev-Popov-Determinante  $\mathcal{J}$  am Gribov-Horizont, welcher die für das Infrarotverhalten der Theorie verantwortlichen Eichfreiheitsgrade enthält, verschwindet und damit  $\ln \mathcal{J}$  divergiert, muß aufgrund der Relation (4.25) die Krümmung  $\chi$  in der Tat im Infraroten divergent sein.

Das hier vorliegende Infrarotverhalten (4.66) basiert in entscheidender Weise auf der vollständigen Implementierung der durch  $\chi_{ij}^{ab}$  repräsentierten Krümmungsterme, welche in der kinetischen Energie (4.54) und insbesondere in der Coulombenergie (4.56) enthalten sind. Während für von Null verschiedene Faddeev-Popov-Potenzen  $\alpha \neq 0$  (beispielsweise  $\alpha = \frac{1}{2}$ ) die Variationsfunktion  $\omega(k)$  stets ein divergentes Verhalten im Infraroten besitzt, kann für den Wert  $\alpha = 0$  eine infrarot endliche Funktion  $\omega(k)$  realisiert sein. Völlig unabhängig von der speziellen Wahl von  $\alpha$  wird der Gluonpropagator  $\Omega^{-1}(k)$  im nicht-perturbativen Bereich vollständig durch die Krümmung  $\chi(k)$  im Konfigurationsraum bestimmt und verschwindet demzufolge im infraroten Bereich aufgrund der Divergenz von  $\chi(k)$ .

<sup>8</sup>Sowohl der Geistformfaktor  $d(k)$  als auch die skalare Krümmung  $\chi(k)$  und der Coulombformfaktor  $f(k)$  enthalten ihrerseits lediglich über die Gluonenergie  $\Omega(k)$  die beiden Minimierungsparameter  $\alpha$  und  $\omega(k)$ .

Mit der Relation (4.66) besitzt das Yang-Mills-Vakuumwellenfunktional, abgesehen von dem Normierungsfaktor, im Infraroten die Form

$$\Psi[A^\perp] = 1, \quad (4.67)$$

welche der Einfachheit halber der Untersuchung in [52] zugrunde liegt. Durch die hier vorliegende Untersuchung ist damit gezeigt, daß im Rahmen der Zweischleifenordnung bezüglich der Energie durch  $\Psi[A^\perp] = 1$  das korrekte Wellenfunktional im infraroten Bereich der Theorie dargestellt wird. Diese Form (4.67) des Wellenfunktionals repräsentiert ein Vakuum, in dem sich Eichfreiheitsgrade an verschiedenen Orten  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x}'$  für große Abstände  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \rightarrow \infty$  völlig unkorreliert zueinander verhalten. Allerdings befinden sich die Eichfelder in einem gekrümmten Konfigurationsraum, welcher durch das Auftreten der Faddeev-Popov-Determinante  $\mathcal{J}$  im Maß des Pfadintegrals zum Ausdruck kommt. Unter Verwendung des Wellenfunktionals (4.67) im Infraroten und der Relation (4.25) finden wir für den infraroten Grenzfall eines Erwartungswertes  $\langle O[A^\perp] \rangle$  die folgende Darstellung mit einem durch die Krümmung  $\chi$  dominierten „Gaußschen Ensemble“

$$\begin{aligned} \langle O[A^\perp] \rangle &= \int \mathcal{D}A^\perp \mathcal{J}[A^\perp] O[A^\perp] \\ &= \int \mathcal{D}A^\perp O[A^\perp] \exp \left[ - \int d^3x \int d^3x' A_i^{\perp a}(\mathbf{x}) \chi(\mathbf{x} - \mathbf{x}') A_i^{\perp a}(\mathbf{x}') \right] \end{aligned} \quad (4.68)$$

und erhalten insbesondere für den Gluonpropagator

$$\left\langle A^\perp(\mathbf{x}) A^\perp(\mathbf{x}') \right\rangle \Big|_{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \rightarrow \infty} \sim \chi^{-1}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|), \quad (4.69)$$

in Übereinstimmung mit dem infraroten Verhalten (4.66). Das Infrarotverhalten der Theorie wird somit ausschließlich von der Krümmung im Konfigurationsraum bestimmt und nicht durch die Variationsfunktion  $\omega$  im Gaußschen Ansatz (4.7). Die analytische Untersuchung der Krümmung  $\chi(k)$  im Rahmen der Winkelnäherung (siehe Abschnitt 3.5.1 bzw. 3.6.2) führte auf das Infrarotverhalten  $\chi(k \rightarrow 0) \sim 1/k$  (3.163), (3.259) und damit wegen der Relation (4.69) auf einen im Infraroten verschwindenden Gluonpropagator. Da der Gluonpropagator aus physikalischer Sicht, bis auf einen Faktor 2, mit der inversen Gluonenergie übereinstimmt, verursacht der verschwindende Gluonpropagator eine unendlich hohe Gluonenergie im infraroten Bereich und bewirkt damit die Unterdrückung infraroter Gluonen. Dies ist ein starker Hinweis auf den Farbeinschluß der Gluonen im Yang-Mills-Vakuum.

Der Erwartungswert des Coulompropagators (3.12)

$$V^{ab}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \left\langle \left[ \left( -\partial_i \hat{D}_i(A^\perp) \right)^{-1} (-\Delta) \left( -\partial_j \hat{D}_j(A^\perp) \right)^{-1} \right]_{\mathbf{xy}}^{ab} \right\rangle_\Psi \quad (4.70)$$

repräsentiert das Potential zwischen zwei statischen Farbladungen. Im Rahmen der auf der Winkelnäherung basierenden analytischen Untersuchungen in den Abschnitten 3.5.1 und 3.6.2 fanden wir für das Infrarotverhalten dieses nicht-abelschen Potentials  $V(k) \sim 1/k^4$  in  $D = 3 + 1$  und  $V(k) \sim 1/k^3$  in  $D = 2 + 1$  Dimensionen. Dieses Verhalten von  $V(k)$  führt für große Abstände der statischen Farbladungen, jeweils für  $D = 3 + 1, 2 + 1$ , auf ein linear ansteigendes Potential. Der damit bewirkte Farbeinschluß der statischen Farbladungen wird durch das Infrarotverhalten des Faddeev-Popov-Propagators  $\langle (-\partial_i \hat{D}_i)^{-1} \rangle_\Psi$  bestimmt.

## 4.7 Yang-Mills-Theorie in $D = 1 + 1$

Die Yang-Mills-Theorie in  $D = 1 + 1$  Dimensionen reduziert sich von einer Quantenfeldtheorie in eine gewöhnliche Quantentheorie innerhalb eines gekrümmten Raumes und kann auf einem Torus exakt gelöst werden. Die Implementierung der Coulombbeziehung  $\partial_1 A_1(x_1) = 0$  führt auf konstante Eichfelder  $A_1(x_1) = \text{const.}$ , welche im Farbraum durch die Ausnutzung der globalen Eichfreiheit  $U$  diagonalisiert werden können.

Wir definieren den verbleibenden quantenmechanischen Freiheitsgrad  $a$  durch

$$gLA_1 \equiv gLA_1^a \frac{\tau^a}{2} = U \frac{a}{2} \tau^3 U^\dagger, \quad (4.71)$$

wobei  $L$  die räumliche Ausdehnung des Torus darstellt. Die Faddeev-Popov-Determinante ist in  $D = 1 + 1$  Dimensionen durch den expliziten Ausdruck

$$\mathcal{J}(a) = \sin^2 a \quad (4.72)$$

bestimmt [55]. Der Gribov-Horizont wird durch die Punkte  $a = n\pi$  mit  $n \in \mathbb{Z}$  repräsentiert, und die FMR ist durch das Intervall  $[0, \pi]$  gegeben. Der Hamiltonoperator der Yang-Mills-Theorie in  $1 + 1$  Dimensionen ist bezüglich der Koordinate  $a$  lediglich durch den kinetischen Term

$$H_{kin} = -\frac{g^2 L}{8} \frac{1}{\sin^2 a} \frac{d}{da} \sin^2 a \frac{d}{da} \quad (4.73)$$

bestimmt, da einerseits in einer Raumdimension kein magnetisches Feld existiert und andererseits nur ein nichttrivialer Farbfreiheitsgrad in der Theorie verbleibt und daher keine dynamische Gluonladung ( $-\hat{A}_1^{ab} \Pi_1^{\perp a} = 0$ ) auftritt. Dementsprechend verschwindet der Coulombterm in (3.6) bei der Abwesenheit äußerer Farbladungen.

Unter Verwendung des Ansatzes

$$\Psi_k(a) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{J}(a)}} \phi_k(a) = \frac{1}{\sin a} \phi_k(a), \quad (4.74)$$

welcher zu der Wahl von  $\alpha = \frac{1}{2}$  in (4.5) korrespondiert, besitzt die stationäre Schrödinger-Gleichung  $H\Psi_k = E_k\Psi_k$  die Form

$$-\frac{g^2 L}{8} \phi_k''(a) = \left( E_k + \frac{g^2 L}{8} \right) \phi_k(a). \quad (4.75)$$

Die Lösung dieser Gleichung ist durch

$$\phi_k(a) = \sin(ka), \quad E_k = \frac{g^2 L}{8} (k^2 - 1) \quad (4.76)$$

gegeben [56]. Im Kontinuum-Limes  $L \rightarrow \infty$  verbleibt lediglich der Grundzustand  $k = 1$  ( $E_1 = 0$ ), da alle angeregten Zustände  $k > 1$  eine unendliche hohe Energie erhalten.

Basierend auf dem Ergebnis (4.76) nimmt das Wellenfunktional (4.74) des Grundzustandes  $k = 1$  die Form

$$\Psi_{k=1}(a) = 1 \quad (4.77)$$

an und stimmt somit exakt mit dem Infrarot-Limes des Yang-Mills-Wellenfunktionals (4.67) in  $D = 3 + 1$  Dimensionen überein. Ferner verschwindet die radiale Wellenfunktion  $\phi_k(a)$  (4.76) auf dem Gribov-Horizont  $a = n\pi$  mit  $n \in \mathbb{Z}$  und kompensiert damit die ebenfalls am Gribov-Horizont verschwindende Faddeev-Popov-Determinante  $\mathcal{J}(a)$  (4.72). Da für die Wahl von  $\alpha = \frac{1}{2}$  die Variationsfunktion  $\omega(k)$  eine Infrarotdivergenz besitzt, verschwindet auch in  $D = 3 + 1$  Dimensionen das radiale Wellenfunktional  $\phi[A^\perp]$  (4.7) im infraroten Grenzfall und zeigt somit dasselbe Verhalten wie im hier vorliegenden  $D = 1 + 1$  dimensionalen Fall.

## 4.8 Zusammenfassung

In dem hier vorliegenden Kapitel diskutierten wir die Variationslösung der Yang-Mills-Schrödingergleichung in der Coulombbeichung basierend auf einer Klasse von Wellenfunktionalen (4.5). Diese Klasse von Wellenfunktionalen besteht zum einen aus einem Gaußschen Ansatz und zum anderen aus einer beliebigen Potenz  $\alpha$  der Faddeev-Popov-Determinante  $\mathcal{J}$ . Dadurch erhalten insbesondere diejenigen Eichkonfigurationen, welche auf dem Gribov-Horizont liegen und damit das nicht-perturbative Verhalten der Theorie bestimmen, sehr unterschiedliche Wahrscheinlichkeitsamplituden.

Das Ergebnis dieser Untersuchung zeigt, daß die stationäre Lösung der Schrödingergleichung im Rahmen des Einschleifenniveaus in den Variationsgleichungen (4.11) (bzw. dem Zweischleifenniveau in der Vakuumenergie) unabhängig von der Potenz  $\alpha$  der Faddeev-Popov-Determinante  $\mathcal{J}$  ist. Damit ist auch der transversale Gluonpropagator (4.41), welcher durch die selbstkonsistente Lösung  $\Omega$  der Variationsgleichung  $\frac{\delta\langle H \rangle}{\delta\omega} = 0$  bestimmt wird, unabhängig von der Potenz  $\alpha$ . Unterschiedliche Potenzen  $\alpha$  der Faddeev-Popov-Determinante führen zwar auf völlig unterschiedliche Variationsfunktionen  $\omega$ , insbesondere im infraroten Bereich, verändern jedoch weder die Form des Gluonpropagators  $\Omega^{-1}$  noch den Formfaktor  $d$  des Faddeev-Popov-Propagators, welcher im wesentlichen den linearen Anstieg im nicht-abelschen Coulombpotential (4.1) verursacht.

Das Vakuumwellenfunktional (4.67) wird im infraroten Grenzfall unabhängig vom Eichfeld  $A^\perp$  und beschreibt damit ein stochastisches Vakuum, in welchem die Farbfreiheitsgrade nicht über große Entfernungen propagieren können. Diese Form des Wellenfunktionals im Infraroten stimmt mit dem exakten Wellenfunktional in  $D = 1 + 1$  Dimensionen überein.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß das Infrarotverhalten der Yang-Mills-Theorie in der Coulombbeichung nahezu vollständig durch die Krümmung im Konfigurationsraum bestimmt wird und somit relativ unempfindlich bezüglich der speziellen Wahl des Ansatzes für das Vakuumwellenfunktional ist.

## Kapitel 5

# Schlußfolgerungen und Ausblick

In der vorliegenden Dissertation untersuchten wir die Vakuumstruktur der Yang-Mills-Theorie in der Coulombbeichung unter Verwendung des Schrödingerbilds. Die Motivation für die Anwendung dieser Formulierung basiert im wesentlichen auf zwei zentralen Vorteilen: Zum einen garantiert sie, im Vergleich zur ursprünglichen Formulierung in der Weyleichung, durch die vollständige Eichfixierung automatisch die Implementierung des Gaußschen Gesetzes, also der Zwangsbedingung für physikalische Zustände. Zum anderen enthält der Hamiltonoperator in der Coulombbeichung das nicht-abelsche Coulombpotential zwischen zwei statischen Farbladungen und ermöglicht daher einen direkten Zugang für die Untersuchung des Farbeinschlusses.

Ausgangspunkt für die Variationsbehandlung der funktionalen Yang-Mills-Schrödingergleichung bildet ein physikalisch motivierter Ansatz für das Wellenfunktional des Vakuums. Dieser Ansatz ist am Gribov-Horizont divergent und berücksichtigt damit die Tatsache, daß die dominanten Infrarotfreiheitsgrade, wie etwa Zentrumsirbel, auf dem Gribov-Horizont liegen. Die Minimierung der bis zur zweiten Schleifenordnung berechneten Vakuumenergie führt auf ein nichtlineares, gekoppeltes System von Schwinger-Dyson-Integralgleichungen für die Gluonenergie, den Geist- und Coulombformfaktor und die Krümmung im Konfigurationsraum. Sowohl die analytische Untersuchung mit Hilfe der Winkelnäherung als auch die volle numerische Lösung dieser gekoppelten Integralgleichungen zeigen im infraroten Sektor, also dem nicht-perturbativen Bereich, eine divergente Gluonenergie. Dieses Ergebnis deutet auf die Abwesenheit freier Gluonen bei kleinen Energien im physikalischen Spektrum und damit auf den Farbeinschluß der Gluonen hin. Der Geistformfaktor zeigt im infraroten Grenzfall ebenfalls ein divergentes Verhalten und erzeugt ein für große Abstände linear ansteigendes statisches Quarkpotential. Wir finden dieses physikalische Verhalten, also den Farbeinschluß der Gluonen und Quarks, sowohl im  $D = 2 + 1$  als auch im  $D = 3 + 1$  dimensionalen Fall. Insbesondere zeigen unsere Untersuchungen, daß die vollständige Implementierung der Krümmung des Konfigurationsraumes, welche durch den Faddeev-Popov-Operator zum Ausdruck kommt, von zentraler Bedeutung für die Eigenschaften des Farbeinschlusses ist. Eine Vernachlässigung dieser Krümmung in  $D = 3 + 1$  Dimensionen führt zu einem völlig anderen Infrarotverhalten und insbesondere zum Verlust des Farbeinschlusses der Gluonen und Quarks. Im Vergleich dazu hat die Vernachlässigung der Krümmung in der  $D = 2 + 1$  dimensionalen Yang-Mills-Theorie noch weitreichendere Konsequenzen – denn ohne die Krümmung im Konfigurationsraum existiert keine konsistente Lösung des gekoppelten Schwinger-Dyson-Integralgleichungssystems.

Aufgrund der großen Dimension des Konfigurationsraumes ist ein Großteil der Feldkonfigurationen in unmittelbarer Nähe des Gribov-Horizontes lokalisiert. Da der Faddeev-Popov-Operator für diese Konfigurationen nahezu verschwindende Eigenwerte besitzt, bewirken diese Eichfelder eine deutliche Verstärkung des Coulombpotentials und führen damit zum Farbeinschluß der Quarks. In diesem Zusammenhang stellte sich die Frage, in welcher Weise die Wahl des Ansatzes für den Yang-Mills-Vakuuzustand das Lösungsverhalten im infraroten Bereich und damit die Eigenschaften des Farbeinschlusses beeinflusst. Für die Untersuchung dieser Fragestellung benutzen wir für das Wellenfunktional einen im Vergleich zu der bisherigen Variationsbehandlung deutlich verallgemeinerten Ansatz, welcher eine beliebige Potenz der Faddeev-Popov-Determinante als zusätzlichen Variationsparameter enthält. Dadurch beinhaltet dieser Ansatz eine höchst unterschiedliche Gewichtung der für die nicht-perturbativen Eigenschaften der Theorie wesentlichen Feldkonfigurationen am Gribov-Horizont. Eine gründliche Untersuchung mit diesem Ansatz zeigt, daß die Variationslösung der stationären Schrödingergleichung innerhalb des Einschleifenniveaus in den Variationsgleichungen (bzw. Zweischleifenordnung in der Vakuumenergie) unabhängig von der Potenz der Faddeev-Popov-Determinante ist. Damit verändern sich insbesondere im infraroten Bereich weder der Gluon- noch der Geistpropagator, welcher den linearen Anstieg im nicht-abelschen Coulombpotential verursacht. Die durchgeführte Variationsbehandlung führt auf ein eindeutiges Infrarotverhalten des Vakuumwellenfunktionals und daher auf eine eindeutige Wahrscheinlichkeitsverteilung der Feldkonfigurationen am Gribov-Horizont. In diesem infraroten Grenzfall wird das Vakuumwellenfunktional unabhängig vom Eichfeld und beschreibt daher ein stochastisches Vakuum, in welchem die Farbfreiheitsgrade nicht über große Entfernungen propagieren können. Diese Form des Wellenfunktionals im Infraroten stimmt mit dem exakten Wellenfunktional in  $D = 1 + 1$  Dimensionen überein.

Die im Rahmen dieser Arbeit gefundenen Ergebnisse zum Yang-Mills-Vakuum können als Ausgangspunkt für die weitere Untersuchung interessanter Fragestellungen dienen. Beispielsweise im Hinblick auf den Hochtemperaturgrenzfall der  $(3+1)$ -dimensionalen Theorie, welcher einer  $(2+1)$ -dimensionalen Yang-Mills-Theorie zusammen mit einem Higgsfeld entspricht, lassen sich die bereits vorhandenen Ergebnisse zur  $(2+1)$ -dimensionalen Yang-Mills-Theorie verwenden. Eine weitere interessante Untersuchung liegt in der Berechnung der räumlichen Wilsonschleife und der Frage, in welcher Weise sich das daraus ermittelte Quarkpotential von dem hier diskutierten nicht-abelschen Coulombpotential unterscheidet. Ferner sollten in die vorhandenen Entwicklungen dynamische Quarks implementiert werden, um eine Beschreibung der physikalischen Hadronen, also der Mesonen und Baryonen, zu ermöglichen.

Die im Rahmen dieser Dissertation entwickelten mathematischen und numerischen Methoden lassen sich in effizienter Weise auch auf andere Bereiche der Physik, insbesondere der Fluidtheorie und Aeroakustik, übertragen.

Beispielsweise kann die im Kapitel 3 diskutierte Entwicklung des Geistpropagators und dessen Wechselwirkung mit dem Yang-Mills-Feld auf die nicht-perturbative Behandlung der akustischen Strömungsschwankungen bei der Anwesenheit einer Hintergrund-Strömung angewandt werden. Die konkrete Umsetzung dieser Entwicklung führt auf theoretische Modelle, welche in effizienter Weise die Schallausbreitung innerhalb einer wirbelbehafteten Strömung beschreiben.

Eine weitere interessante Anwendung im Hinblick auf die Aeroakustik basiert auf der ka-

nonischen Formulierung der Fluidtheorie und der hierfür benutzten Clebsch-Parametrisierung [57] des Geschwindigkeitsfeldes

$$\mathbf{v} = \nabla\phi + \alpha\nabla\beta \quad (5.1)$$

mit den Potentialen  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\phi$ . Dabei repräsentieren die sogenannten Gauß-Potentiale  $\alpha$  und  $\beta$  aufgrund der Darstellung

$$\nabla \times \mathbf{v} = (\nabla\alpha) \times (\nabla\beta) \quad (5.2)$$

den Wirbelanteil des Strömungsfeldes  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ . Die Untersuchung der kanonischen Bewegungsgleichungen dieser Wirbelpotentiale  $(\alpha, \beta)$  ermöglicht das Studium einiger sehr interessanter Fragestellungen. Durch die Diskussion stabiler Anregungen in den Potentialen  $(\alpha, \beta)$  erhalten wir neue Hinweise auf den Übergang einer laminaren Strömung in die turbulente Phase. Andererseits zeigt die Zeitentwicklung der Potentiale  $\alpha$  und  $\beta$ , ob akustische Fluktuationen bei der Anwesenheit einer wirbelbehafteten Hintergrundströmung ebenfalls Wirbelstrukturen ausbilden. Die mathematische Behandlung der Wirbelerzeugung mit Hilfe der Potentiale  $\alpha$  und  $\beta$  besitzt sehr enge Parallelen zu dem in Kapitel 2 diskutierten Gribov-Problem der nicht-abelschen Quantenfeldtheorien.

Eine ausführliche Diskussion dieser Thematik würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen und wird daher an anderer Stelle dargelegt [58].



# Anhang A

## Konventionen

### A.1 Einheiten

In der vorliegenden Arbeit benutzen wir die natürlichen Einheiten

$$\hbar = c = 1. \quad (\text{A.1})$$

Mit der Wahl dieser Einheiten besitzt die Masse und der Impuls die Dimension der Energie, wohingegen die Zeit und die Länge die Dimension einer inversen Energie erhalten. Insbesondere gilt

$$1\text{fm} = 10^{-15}\text{m} = (197.33\text{MeV})^{-1}. \quad (\text{A.2})$$

### A.2 Minkowskiraum

Als ein pseudo-euklidischer Vektorraum in vier Dimensionen basiert der Minkowskiraum auf dem metrischen Tensor

$$g = (g_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad (\text{A.3})$$

$$g^{-1} = (g^{\mu\nu}) = g \quad (\text{A.4})$$

und beinhaltet die Vierervektoren  $x^\mu$  und  $x_\mu$

$$x^\mu = (x_0, \mathbf{x}) \quad , \quad x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = (x_0, -\mathbf{x}) \quad (\text{A.5})$$

mit dem Skalarprodukt

$$x \cdot y = x_\mu y^\mu = x_0 y_0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_0 y_0 - x_i y_i. \quad (\text{A.6})$$

Dabei werden die Lorentzindizes, welche von  $0 \dots 3$  laufen, mit griechischen Buchstaben bezeichnet, wohingegen die lateinischen Indizes die gewöhnlichen Raumrichtungen repräsentieren, welche von  $1 \dots 3$  laufen.

Im Gegensatz dazu ist die Bezeichnung der vier-dimensionalen Ableitung auf eine andere Art definiert

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = (\partial_0, -\nabla) \quad , \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_0, \nabla), \quad (\text{A.7})$$

wobei  $\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$  gilt.

### A.3 Lie-Gruppen und Lie-Algebren

Im vorliegenden Abschnitt diskutieren wir einige relevante Gruppenkonventionen, wobei wir uns auf die  $SU(N_C)$ -Lie-Gruppen konzentrieren. Ein Gruppenelement  $U$  der  $SU(N_C)$ -Lie-Gruppe kann in der Form

$$U = e^{it^a \phi^a} \quad (\text{A.8})$$

dargestellt werden. Dabei bezeichnen die Winkel  $\phi^a$  die reellen Parameter des Gruppenelements und  $t^a$  die Generatoren der entsprechenden Lie-Algebra. Die Darstellung der Algebra ist in Übereinstimmung mit der Darstellung der Gruppenelemente  $U$  zu wählen. Die hermiteschen Generatoren  $(t^a)^\dagger = t^a$  erfüllen die Kommutatorrelation

$$[t^a, t^b] = if^{abc}t^c, \quad (\text{A.9})$$

wobei  $f^{abc}$  die total antisymmetrischen Strukturkonstanten repräsentieren. Die Generatoren in der fundamentalen Darstellung sind auf den Faktor  $1/2$  normiert

$$\text{tr}(t^a t^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}. \quad (\text{A.10})$$

In der adjungierten Darstellung sind die Generatoren durch

$$(\hat{T}^a)^{bc} = f^{bac} \quad (\text{A.11})$$

definiert und erfüllen die Kommutatorrelation

$$[\hat{T}^a, \hat{T}^b] = f^{abc} \hat{T}^c. \quad (\text{A.12})$$

Generell werden Objekte der Lie-Algebra, welche sich in der adjungierten Darstellung befinden, mit einem Dach „ $\hat{\phantom{x}}$ “ dargestellt. Die Strukturkonstanten erfüllen die Jakobi-Identität

$$f^{abd} f^{cde} + f^{bcd} f^{ade} + f^{cad} f^{bde} = 0 \quad (\text{A.13})$$

und sind auf

$$f^{abc} f^{dbc} = -\text{tr}(\hat{T}^a \hat{T}^d) = N_C \delta^{ad} \quad (\text{A.14})$$

normiert. Ferner gelten die nützlichen Gruppenrelationen

$$U t^a U^\dagger = t^b \hat{U}^{ba} \quad (\text{A.15})$$

$$U^\dagger t^a U = \hat{U}^{ab} t^b, \quad (\text{A.16})$$

wobei

$$\hat{U}^{ab} = \left( e^{-\hat{T}^c \phi^c} \right)^{ab} = 2 \text{tr} \left( t^a U t^b U^\dagger \right) \quad (\text{A.17})$$

eine reelle und orthogonale Matrix darstellt. Des weiteren läßt sich zeigen, daß die Objekte  $iU^\dagger \frac{\partial}{\partial \phi_a} U$  und  $iU \frac{\partial}{\partial \phi_a} U^\dagger$  innerhalb der Lie-Algebra liegen (siehe Abschnitt 2.6.1) und deshalb in der Form

$$iU^\dagger \frac{\partial}{\partial \phi_a} U = \left( - \int_0^1 ds \hat{U}^{ab}(s) \right) t^b \quad (\text{A.18})$$

$$iU \frac{\partial}{\partial \phi_a} U^\dagger = t^b \left( - \int_0^1 ds \hat{U}^{ba}(s) \right) \quad (\text{A.19})$$

mit der Matrix

$$\hat{U}^{ab}(s) = \left( e^{-\hat{T}^c(1-s)\phi^c} \right)^{ab} \quad (\text{A.20})$$

dargestellt werden können.



## Anhang B

# Numerische Methoden zur Lösung der Schwinger-Dyson-Integralgleichungen

Dieser Abschnitt beinhaltet eine kurze Beschreibung der numerischen Methoden zur Lösung der gekoppelten Schwinger-Dyson-Integralgleichungen. Die in diesen nichtlinearen Integralgleichungen auftretenden dreidimensionalen Einschleifenintegrale besitzen in sphärischen Koordinaten allgemein die folgende Form

$$\begin{aligned} I(k) &= \int^{\Lambda} d^3q h(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \\ &= \int_0^{\Lambda} dq q^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin(\theta) f(k, q, \theta). \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Dabei bezeichnet  $\mathbf{k}$  den äußeren Impuls,  $\mathbf{q}$  den inneren Schleifenimpuls und  $\theta$  den Winkel zwischen diesen beiden Vektoren.

Diese Integrale hängen aufgrund der Translations- und Rotationsinvarianz lediglich vom Betrag des äußeren Impulses  $k = |\mathbf{k}|$  ab. Da der Integrand von  $\varphi$  unabhängig ist, kann diese Winkelintegration analytisch ausgeführt werden und führt auf die Darstellung

$$I(k) = 2\pi \int_0^{\Lambda} dq q^2 W(k, q) \quad (\text{B.2})$$

mit dem verbleibenden Winkelintegral

$$W(k, q) = \int_0^{\pi} d\theta \sin(\theta) f(k, q, \theta). \quad (\text{B.3})$$

### B.1 Winkelintegrale

Die Berechnung der Winkelintegrale  $W(k, q)$  (B.3) erfolgt mit Hilfe der Gauß-Legendre-Quadratur

$$W(k, q) \simeq \sum_{i=1}^N w_i \sin(\theta_i) f(k, q, \theta_i), \quad (\text{B.4})$$

wobei  $w_i$  die Gewichte und  $\theta_i$  die Koordinatenstützstellen der Gauß-Legendre-Quadratur bezeichnen. Bezüglich eines skalierten Integrationsintervalls  $[-1, 1]$  sind die Gewichte  $w_i$  dieser Quadratur durch

$$w_i = \frac{2}{(1 - x_i^2)[P'_n(x_i)]^2} \quad (\text{B.5})$$

bestimmt [59]. Dabei bezeichnen  $P_n(x)$  die Legendrepolynome, welche mit Hilfe der Rodrigues-Formel in der Form

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (\text{B.6})$$

dargestellt werden können. Für die praktische Anwendung erfolgt die Berechnung der Gewichte  $w_i$  und der Integrationsstützstellen  $\theta_i$  durch eine Standardroutine der „Numerical Recipes Library“ [59].

## B.2 Impulsintegrale

Nach der Berechnung des Winkelintegrals (B.3) sind wir in der Lage, das Impulsintegral (B.2) zu bestimmen. Da die zu berechnenden Propagatoren, welche einen wesentlichen Einfluß auf den Integranden haben, im infraroten Bereich ein divergentes Verhalten besitzen, ist darauf zu achten, daß die Integration insbesondere bei kleinen Impulsen sehr genau ist. Um eine möglichst hohe Genauigkeit durch eine große Stützstellenanzahl im infraroten Bereich zu erhalten, führen wir deshalb für die Impulsintegration eine logarithmische Skala ein

$$x = \ln q \quad q = e^x \quad (\text{B.7})$$

$$dx = \frac{dq}{q} \quad dq = e^x dx \quad (\text{B.8})$$

und erhalten damit für das Impulsintegral den Ausdruck

$$I(k) = 2\pi \int_{\ln \epsilon}^{\Lambda} dx e^{3x} W(k, e^x). \quad (\text{B.9})$$

Strenggenommen wäre die untere Grenze des Integrals  $-\infty$ . Da dies für praktische Berechnungen nicht möglich ist, müssen wir an dieser Stelle analog zum ultravioletten Bereich mit einer unteren Grenze  $\ln \epsilon$  arbeiten. In diesem Zusammenhang ist darauf zu achten, daß sowohl die obere Grenze  $\ln \Lambda$  als auch die untere Grenze  $\ln \epsilon$  so groß bzw. klein sind, damit keine Beeinflussung des Lösungsverhaltens auftritt.

Die Anwendung der bereits beschriebenen Gauß-Legendre-Quadratur auf das Impulsintegral (B.9) gewährleistet zwar eine sehr gute Integration im infraroten Bereich, reicht aber noch nicht aus, um insgesamt eine hohe Genauigkeit zu erzielen. Insbesondere dann, wenn sich der Integrationsimpuls  $q = e^x$  in der unmittelbaren Umgebung des äußeren Impulses  $k$  befindet, liefert der Integrand des Impulsintegrals sehr große Beiträge. Dabei kann es durchaus vorkommen, daß der Integrand an der Stelle  $q = e^x = k$  eine Singularität besitzt, obwohl das Integral existiert. Sowohl für das physikalische Verhalten der Propagatoren als auch für ein stabiles Konvergenzverhalten des gekoppelten Lösungsalgorithmus (siehe Abschnitt B.3) ist eine genaue numerische Integration gerade in diesem Impulsbereich von zentraler Bedeutung.

Um dies zu gewährleisten, teilen wir die Impulsintegration (B.9) in mehrere Integrationsbereiche auf

$$I(k) = 2\pi \left[ \int_{\ln \epsilon}^{\ln(k-\epsilon')} dx e^{3x} W(k, e^x) + \int_{\ln(k-\epsilon')}^{\ln k} dx e^{3x} W(k, e^x) \right. \\ \left. + \int_{\ln k}^{\ln(k+\epsilon')} dx e^{3x} W(k, e^x) + \int_{\ln(k+\epsilon')}^{\Lambda} dx e^{3x} W(k, e^x) \right], \quad (\text{B.10})$$

welche dynamisch jeweils an den Wert des äußeren Impulses  $k$  angepaßt sind. Die Einzelintegrale in (B.10) werden dann jeweils mit der bereits diskutierten Gauß-Legendre-Quadratur berechnet. Eine detaillierte Untersuchung zeigt, daß mit dieser Behandlung der Impulsintegration eine sehr hohe Genauigkeit erzielt wird.

### B.3 Gekoppelter Löser

Der Aufbau des Algorithmus zur Lösung der gekoppelten Schwinger-Dyson-Integralgleichungen ist in der Abb. B.1 schematisch dargestellt. Als Ausgangspunkt für die Berechnung des Yang-Mills-Vakuums benutzen wir eine geschätzte Gluonfunktion, also beispielsweise

$$\omega(k) = \frac{A}{k^\alpha} + k, \quad (\text{B.11})$$

welche insbesondere im ultravioletten Bereich das perturbative Verhalten  $\omega(k) \rightarrow k$  für  $k \rightarrow \infty$  aufweist. Basierend auf dieser Gluonfunktion (B.11) wird zunächst die Geistgleichung (3.175) gelöst, indem wir mit der Startfunktion  $d^{(0)}(k) = 1$  in der bereits beschriebenen Weise das Winkel- und Impulsintegral der Geistgleichung berechnen und dadurch eine neue Geistfunktion erhalten. Diese Iteration der Geistgleichung (3.175) wird solange fortgesetzt, bis die Abweichung zweier aufeinander folgender Iterationen  $d^{(n)}(k)$  und  $d^{(n+1)}(k)$  in der lokalen Fehlerabschätzung

$$\left| \frac{d^{(n+1)}(k) - d^{(n)}(k)}{d^{(n)}(k)} \right| < \delta \quad \forall k \quad (\text{B.12})$$

unterhalb der Schranke  $\delta$  liegt. Nachdem damit die Geistgleichung für einen bestimmten Renormierungswert  $d(\mu)$  gelöst ist, erfolgt die Überprüfung der Horizontbedingung

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{d(k)} = 0. \quad (\text{B.13})$$

Da diese Bedingung normalerweise nicht auf Anhieb erfüllt ist, muß die Renormierungskonstante  $d(\mu)$  solange angepaßt werden, bis sie der Horizontbedingung genügt und somit  $d(\mu)$  den kritischen Wert  $d_{\text{kr}}$  annimmt.

Unter Verwendung dieser Geistlösung  $d(k)$ , welche auf der Startfunktion (B.11) basiert und die Horizontbedingung (B.13) erfüllt, berechnen wir dann das Krümmungsintegral (3.178) und erhalten mit (3.176) die entsprechende Krümmungsfunktion  $\chi(k)$ .

Basierend auf der Gluonfunktion (B.11) und einer Startfunktion für den Coulombfaktor  $f^{(0)}(k) = 1$  erfolgt die Berechnung des Winkel- und Impulsintegrals (3.179) des Coulombformfaktors. Die Iteration der Coulombgleichung (3.177) verläuft dann völlig analog zu dem bereits für den Geistformfaktor beschriebenen Lösungsschema.

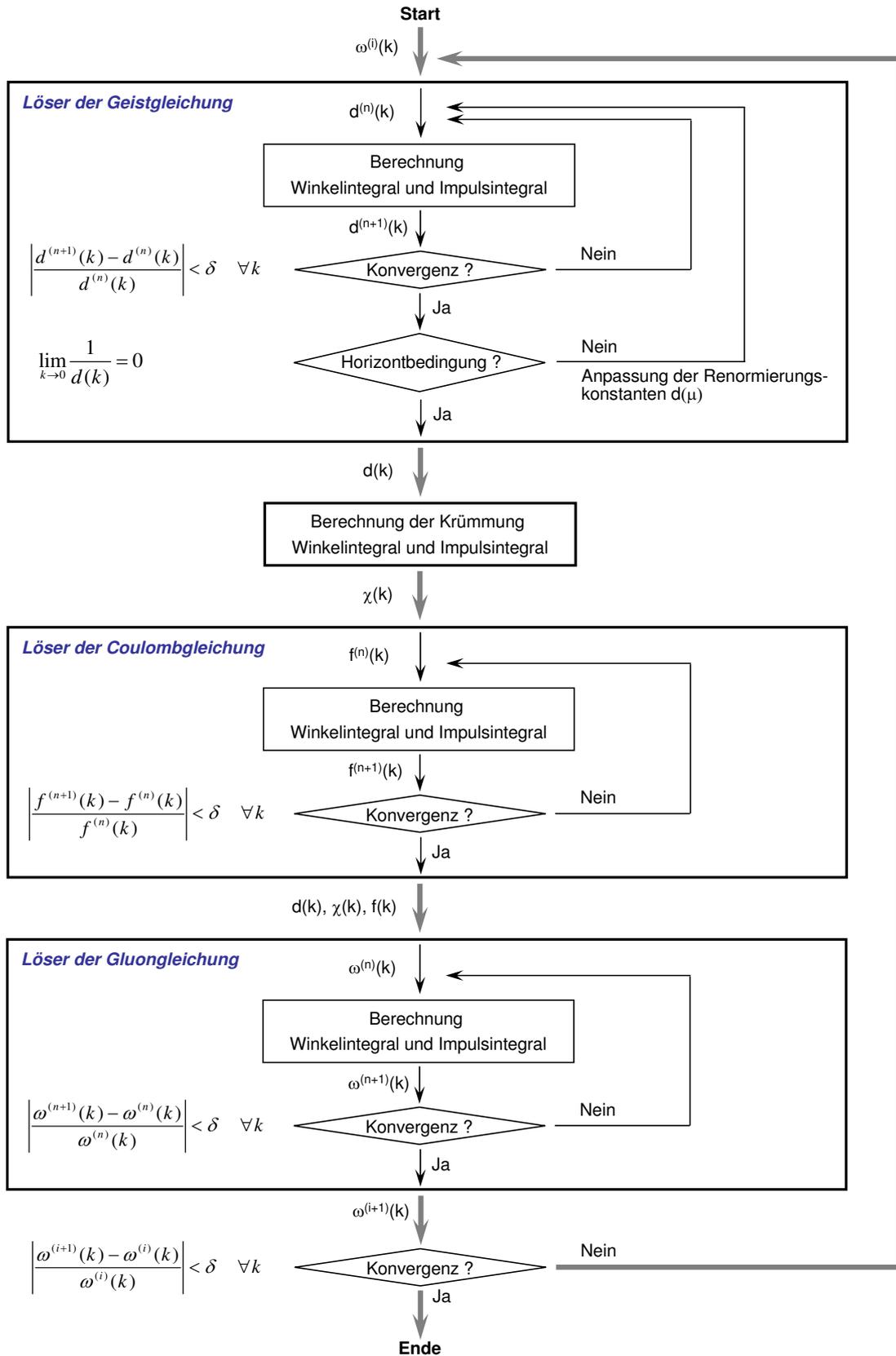


Abbildung B.1: Struktureller Aufbau des gekoppelten Löser.

Für die Berechnung der Winkel- und Impulsintegrale (3.182) der Gluongleichung benutzen wir die Startfunktion (B.11) und die bereits berechneten Funktionen  $d(k)$ ,  $\chi(k)$  und  $f(k)$ . Die Anwendung derselben Iterationsmethode wie bei der Geist- und Coulombfunktion ermöglicht dann die Berechnung der neuen Gluonfunktion  $\omega(k)$ . Die Bewertung der Abweichung der neuen Gluonlösung  $\omega(k)$  von der Startfunktion (B.11) mit dem zu (B.12) entsprechenden Kriterium entscheidet über einen erneuten Durchlauf der gesamten Operationen unter Verwendung der neuen Gluonfunktion als Startfunktion. Diese globale Iteration wird solange durchgeführt, bis das lokale Abbruchkriterium

$$\left| \frac{\omega^{(i+1)}(k) - \omega^{(i)}(k)}{\omega^{(i)}(k)} \right| < \delta \quad \forall k \quad (\text{B.14})$$

erfüllt ist.



# Literaturverzeichnis

- [1] C. N. Yang and R. Mills, Phys. Rev. **96** (1954) 191.
- [2] G. 't Hooft, Conference on Lagrangian Field Theory, Marseille (1972), unpublished.
- [3] D. J. Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. **D8** (1973) 3633  
H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1346  
Phys. Rept. **14** (1974) 129
- [4] M. Creutz, Phys. Rev. **D21** (1980) 2308
- [5] Y. Nambu, Phys. Rev. **D10** (1974) 4262  
S. Mandelstam, Phys. Lett. **B53** (1974) 476  
G. Parisi, Phys. Rev. **D11** (1975) 970  
Z. F. Ezawa and H. C. Tze, Nucl. Phys. **B100** (1976) 1  
R. Brout, F. Englert and W. Fischler, Phys. Rev. Lett. **36** (1976) 649  
F. Englert and P. Windey, Nucl. Phys. **B135** (1978) 529  
G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B190** (1981) 455; Phys. Scr. **25** (1981) 133
- [6] J. Greensite, Prog. Part. Nucl. Phys. **51**: 1, 2003
- [7] G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B138** (1978) 1  
G. Mack and V. B. Petkova, Ann. Phys. (NY) **123** (1979) 442  
G. Mack, Phys. Rev. Lett. **45** (1980) 1378  
G. Mack and V. B. Petkova, Ann. Phys. (NY) **125** (1980) 117  
G. Mack, in: *Recent Developments in Gauge Theories*, eds. G. 't Hooft et al. (Plenum, New York, 1980)  
G. Mack and E. Pietarinen, Nucl. Phys. **B205** [FS5] (1982) 141  
Y. Aharonov, A. Casher and S. Yankielowicz, Nucl. Phys. **B146** (1978) 256  
J. M. Cornwall, Nucl. Phys. **B157** (1979) 392  
H. B. Nielsen and P. Olesen, Nucl. Phys. **B160** (1979) 380  
J. Ambjørn and P. Olesen, Nucl. Phys. **B170** (1980) 60, 265  
E. T. Tomboulis, Phys. Rev. **D23** (1981) 2371
- [8] T. Suzuki, I. Yotsuyanagi, Phys. Rev. **D42** (1990) 4257  
S. Hioki et al. Phys. Lett. **B272** (1991) 326  
G. Bali, Ch. Schlichter, K. Schilling, Prog. Theor. Phys. Suppl. **131** (1998) 645 and refs. therein
- [9] L. DelDebbio, M. Faber, J. Greensite, S. Olejnik, Phys. Rev. **D55** (1997) 2298  
K. Langfeld, H. Reinhardt, O. Tennert, Phys. Lett. **B419** (1998) 317  
M. Engelhardt, K. Langfeld, H. Reinhardt, O. Tennert, Phys. Rev. **D61** (2000) 054504

- 
- [10] V. N. Gribov, Nucl. Phys. **B139** (1978) 1
- [11] D. Zwanziger, Nucl. Phys. **B378** (1992) 525
- [12] J. Greensite, Š. Olejnik and D. Zwanziger, Phys. Rev. **D69** (2004) 074506
- [13] see e.g. the Proceedings of “Lattice 2002” and “Lattice 2003”
- [14] C. Callan, R. Dashen, D. Gross, Phys. Rev. **D17** (1978) 2717, **D19** (1979) 1826, **D20** (1979) 3279  
D. Gross, R. Pisarski, L. Yaffe, Rev. Mod. Phys. **53** (1981) 43
- [15] I. H. Duru and H. Kleinert, Phys. Lett. **B84** (1979) 30
- [16] R. Jackiw, Rev. Mod. Phys. **52** (1980) 661
- [17] K. Johnson, The Yang-Mills Ground State, in: QCD – 20 years later, vol. 7, p. 795, eds. P. M. Zerwas and H. A. Kastrup  
D. Z. Freedman, P. E. Haagensen, K. Johnson and J.-I. Latorre, Nucl. Phys. M. Bauer, D. Z. Freedman, P. E. Haagensen, Nucl. Phys. **B428** (1994) 147
- [18] N. H. Christ and T. D. Lee, Phys. Rev. **D22** (1980) 939; Phys. Scripta **23** (1981) 970  
T. D. Lee, Particle Physics and Introduction to Field Theory, Hardwood Academic, Chur, 1981
- [19] I. L. Kogan and A. Kovner, Phys. Rev. **D52** (1995) 3719  
C. Heinemann, C. Martin, E. Jancu and D. Vautherin, Phys. Rev. **D61** (2000) 116008  
O. Schröder and H. Reinhardt, hep-ph/0207119; Annals Phys. **307** (2003) 452 hep-ph/0306244
- [20] A. P. Szczepaniak and E. S. Swanson, Phys. Rev. **D65** (2002) 025012
- [21] A. P. Szczepaniak, Phys. Rev. **D69**, (2004) 074031
- [22] R. J. Rivers, “Path Integral Methods In Quantum Field Theory”, Cambridge, UK: University Press (1987) (Cambridge monographs on mathematical physics).
- [23] S. Pokorski, “Gauge Field Theories”, Cambridge, UK: University Press (1987) (Cambridge monographs on mathematical physics).
- [24] T. P. Cheng and L. F. Li, Gauge theory of elementary particle physics, Oxford University Press (1984)
- [25] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, An Introduction to quantum field theory, Addison-Wesley (1985)
- [26] R. Jackiw, “Schrödinger Picture Analysis Of Boson And Fermion Quantum Field Theories”, Montreal Conf. QFT 1987:0107-134
- [27] R. Jackiw, “Field Theoretic Results In The Schrodinger Representation”, PRINT-90-0724
- [28] O. Schröder, PhD thesis, University of Tübingen

- 
- [29] H. Reinhardt and O. Schröder, Non-Perturbative Methods in Yang-Mills Theories, Internal lectures
- [30] I. H. Duru and H. Kleinert, Phys. Lett. **B84** (1979) 30
- [31] V. N. Gribov, Quantization of non-Abelian gauge theories, Nucl. Phys. **B139** (1978) 1.
- [32] T. Maskawa, H. Nakajima, Prog. Theor. Phys. 60 (1978) 1526, Prog. Theor. Phys. 63 (1980) 641
- [33] D. Zwanziger, Physics Letters **B114** (1982) 337
- [34] D. Zwanziger, Coulomb-gauge in QCD: renormalization and confinement, Nucl. Phys. **B518** :237-272, 1998
- [35] P. van Baal, Gribov Ambiguities And The Fundamental Domain, hep-th/9711070
- [36] G. Dell'Antonio and D. Zwanziger, Nucl. Phys. **B326** (1991) 333
- [37] D. Zwanziger, Continuum and lattice Coulomb-gauge Hamiltonian, hep-th/9710157
- [38] D. Zwanziger, No confinement without Coulomb confinement, Phys. Rev. Lett. **90**:102001, 2003
- [39] M. Nakahara, Geometry, Topology and Physics, Adam Hilger IOP Publishing, Bristol (1990)
- [40] C. Feuchter and H. Reinhardt, Quark and Gluon Confinement in Coulomb Gauge, hep-th/0402106
- [41] C. Feuchter and H. Reinhardt, Variational Solution of the Yang-Mills Schrödinger Equation in Coulomb Gauge, Phys. Rev. **D70** (2004) 105021
- [42] C. Feuchter and H. Reinhardt, "The Yang-Mills Vacuum in  $D = 2 + 1$  Dimensions in Coulomb Gauge", to be published
- [43] J. Schwinger, Phys. Rev **82** (1951) 664
- [44] W. Dittrich, Phys. Rev **D19** (1979) 2385
- [45] J. P. Greensite, Nucl. Phys. **B166** (1980) 113
- [46] D. Zwanziger, Nucl. Phys. **B518** (1998) 237
- [47] C. Lerche and L. v. Smekal, Phys. Rev. **D65** (2002) 125006  
D. Zwanziger, Phys. Rev. **D65** (2002) 094039  
W. Schleifenbaum, A. Maas, J. Wambach, R. Alkofer, Phys. Rev. **D72** (2005) 014017
- [48] A. R. Swift, Phys. Rev. **D38** (1988) 668
- [49] R. Alkofer and L. v. Smekal, Phys. Rep. **353** (2001) 281
- [50] C. S. Fischer, R. Alkofer, H. Reinhardt, Phys. Rev. **D65** (2002) 094008  
C. S. Fischer, R. Alkofer, Phys. Lett. **B536** (2002) 177

- [51] A. Cuccheri and D. Zwanziger, Phys. Rev. **D65**, 014002 (2002)
- [52] D. Zwanziger, Phys. Rev. **D70**, 094034 (2004)
- [53] J. Greensite, The Confinement Problem in Lattice Gauge Theory, Prog. Part. Nucl. Phys. **51**:1, 2003
- [54] H. Reinhardt and C. Feuchter, On the Yang-Mills Wave Functional in Coulomb Gauge, Phys. Rev. **D71** (2005) 105002
- [55] H. Reinhardt, Mod. Phys. Lett. **A11** (1996) 2451
- [56] S. G. Rajeev, Phys. Lett. **B212** (1988) 203  
J. E. Hetrick, Y. Hosotani, Phys. Lett. **B230** (1989) 88
- [57] A. Clebsch, J. Reine Angew. Math. **56**, 1 (1859)
- [58] C. Feuchter, Canonical Fluid Theory and its Application on Aeroacoustics and Turbulence research, Internal Report (2006), Mahle Group Stuttgart  
C. Feuchter, Acoustics on curved space-times, Internal Report (2006), Mahle Group Stuttgart
- [59] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky and W. T. Vetterlink, Numerical Recipes in Fortran, Cambridge University Press
- [60] A. Cuccheri and D. Zwanziger, Phys. Rev. **D65**, 014001 (2002)
- [61] K. Kajantie, M. Laine, K. Rummukainen and M. E. Shaposhnikov, Nucl. Phys. **B458** (1996) 90
- [62] A. Cucchieri, F. Karsch and P. Petreczky, Phys. Rev. **D64** (2001) 036001
- [63] J. Goldstone, R. Jackiw, Phys. Lett. **B74** (1978) 81  
V. Baluni, B. Grossman, Phys. Lett. **B78** (1978) 226  
A. Izergin et al., Teor. Mat. Fiz. **38** (1979) 3
- [64] F. Lenz, H. W. L. Naus, M. Thies, Ann. Phys. **233** (1994) 317  
H. Reinhardt, Phys. Rev. **D55** (1997) 2331
- [65] H. Reinhardt, Mod. Phys. Lett. **A11** (1996) 2451,  
H. Reinhardt, Nucl. Phys. **B503** (1997) 505
- [66] H. Reinhardt, Phys. Lett. **B557** (2003) 317
- [67] S. Weinberg, "The Quantum Theory of Fields", Cambridge University Press (1995)
- [68] S. Coleman, "Aspects of Symmetry", Cambridge University Press (1995)
- [69] T. Frankel, "The Geometry of Physics", Cambridge University Press (1997)
- [70] T. P. Cheng and L. F. Li, "Gauge Theory of Elementary Particle Physics", Oxford University Press (2002)
- [71] T. Kugo, „Eichtheorie“, Springer Verlag Berlin (1997)

- 
- [72] T. Muta, "Foundations of Quantum Chromodynamics", World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. (2003)
- [73] C. Itzykson and J.B. Zuber, "Quantum Field Theory", McGraw-Hill Book Co. (1985)
- [74] D. C. Khandekar, S. V. Lawande, K. V. Bhagwat, "Path-Integral Methods and their Applications", World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. (1998)
- [75] B. Felsager, "Geometry, Particles, and Fields", Springer Verlag Berlin (1997)
- [76] L. H. Ryder, "Quantum Field Theory", Cambridge University Press (1997)
- [77] R. D. Mattuck, "A Guide to Feynman Diagrams in the Many-Body Problem", Dover Publications, Inc., New York (1992)
- [78] M. Kaku, "Quantum Field Theory", Oxford University Press (1993)
- [79] W. Greiner und J. Reinhardt, „Feldquantisierung“, Harri Deutsch Verlag (1993)
- [80] J. D. Bjorken und S. D. Drell, „Relativistische Quantenfeldtheorie“, BI Wissenschaftsverlag (1993)



## Danksagung

An erster Stelle gilt mein besonderer Dank meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr. Hugo Reinhardt. Seine kompetente Betreuung während meiner gesamten Promotionszeit und seine unermüdliche Bereitschaft zu Diskussionen haben wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Vor allen Dingen gaben seine brillanten Ideen, insbesondere in schwierigen Phasen der Arbeit, entscheidende Impulse.

Herrn Prof. Dr. Reinhard Alkofer danke ich für die erwiesene Unterstützung während der gesamten Dissertation, und Herrn Prof. Dr. Kurt Langfeld gilt mein Dank für seine stets vorhandene Begeisterung, physikalische Fragestellungen zu diskutieren. Besonders danken möchte ich auch Herrn Dr. Oliver Schröder für die vielen konstruktiven Diskussionen und die dadurch erhaltenen Einblicke in das Schrödingerbild. Herrn Dr. Thorsten Tok und Herrn Dr. Markus Quandt danke ich für ihre Hilfsbereitschaft, insbesondere bei den mathematischen Fragestellungen. Mein Dank gilt auch Herrn Dr. Christian Fischer für die interessanten und hilfreichen Diskussionen über die numerischen Methoden. Herrn Wolfgang Schleifenbaum und Herrn Markus Leder danke ich für das Korrekturlesen dieser Arbeit und die gute Zusammenarbeit.

Besonders bedanken möchte ich mich bei allen Kollegen der Arbeitsgruppe von Prof. Reinhardt und des Graduiertenkollegs für spannende Diskussionen, das freundschaftliche Arbeitsklima und die vielen angenehmen Momente in Tübingen.

Dem Sprecher des Europäischen Graduiertenkollegs *Hadronen im Vakuum, in Kernen und Sternen*, Herrn Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Amand Fässler, danke ich ganz herzlich für sein Engagement. Die Teilnahme an den sehr interessanten Lehrveranstaltungen des Graduiertenkollegs sowie die Seminartreffen in Blaubeuren, Todtmoos und Lauterbad ermöglichten mir eine breitere Wissensbasis. Darüber hinaus bedanke ich mich herzlich für die erwiesene finanzielle Unterstützung aus dem Graduiertenkolleg.

Diese vorliegende wissenschaftliche Arbeit wurde zum größten Teil von der Firma Mahle in Stuttgart gefördert. Sowohl die finanzielle Unterstützung als auch der großzügige zeitliche Rahmen waren Grundlage für diese Arbeit. Daher gilt mein besonderer Dank dem Geschäftsführer Herrn Hans Gebert, den Bereichsleitern Herrn Kay Brodesser und Herrn Andreas Enderich, sowie meinem Gruppenleiter Herrn Rainer Handel. Insbesondere Herrn Enderich danke ich für seine uneingeschränkte, freundschaftliche Unterstützung und sein Engagement in jeder Phase der Promotion. Die hohe fachliche Kompetenz der Herren Enderich und Handel und nicht zuletzt die zahlreichen Diskussionen waren für die praktische Umsetzung der theoretischen Erkenntnisse in konkrete Berechnungsmethoden von zentraler Bedeutung. Mein herzlicher Dank gilt auch Frau Ulrike Steinbrenner, Herrn Frank Kohler und Herrn Peter Gucanin, welche die Rahmenbedingungen für den Promotionsvertrag ausgearbeitet haben. Schließlich möchte ich meiner Kollegin und allen Kollegen der Berechnungsabteilung AD3.11 für das freundschaftliche und ausgezeichnete Arbeitsklima sehr herzlich danken.

Herrn Dr. Helmut Schmid-Eilber gilt mein besonderer Dank für seine Unterstützung und seine wertvollen Ratschläge während der gesamten Promotion.

Nicht zuletzt möchte ich auch meiner Freundin Isabel Hammer für ihre liebevolle Unterstützung in allen Phasen der Dissertation ganz herzlich danken.

Mein ganz besonderer Dank gilt meiner Mutter und meinem Vater, die mich mein ganzes Leben lang in einzigartiger Weise unterstützt haben. Ohne ihr Vertrauen wäre mir Vieles nicht gelungen. Daher ist Ihnen diese Arbeit gewidmet.



## Publikationen zur Dissertation

1. C. Feuchter and H. Reinhardt,  
“Quark and Gluon Confinement in Coulomb Gauge”,  
hep-th/0402106
2. C. Feuchter and H. Reinhardt,  
“Variational Solution of the Yang-Mills Schrödinger Equation in Coulomb Gauge”,  
Phys. Rev. **D70** (2004) 105021
3. H. Reinhardt and C. Feuchter,  
“On the Yang-Mills Wave Functional in Coulomb Gauge”,  
Phys. Rev. **D71** (2005) 105002
4. D. Epple, C. Feuchter, H. Reinhardt,  
“The Yang-Mills Vacuum in Coulomb Gauge”,  
AIP Conf. Proc. **756**:269-271,2005
5. C. Feuchter and H. Reinhardt,  
“Quark and Gluon Confinement in Yang-Mills Theory in Coulomb Gauge with the  
variational Approach”,  
Nucl. Phys. Proc. Suppl. **141**:205-210,2005
6. C. Feuchter and H. Reinhardt,  
“The Yang-Mills Vacuum in  $D = 2 + 1$  Dimensions in Coulomb Gauge”,  
to be published

